

PROBLEMAS RESUELTOS

- 5.1. En un mercado de competencia perfecta, las funciones de oferta y demanda de un producto X son
- $$\begin{cases} x^o = 5p - 100 & \text{OFERTA} \\ x^d = 200 - 5p & \text{DEMANDA} \end{cases}$$

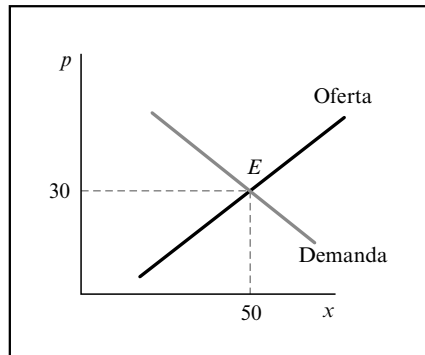
Calcule:

- 1.º El precio y la cantidad de producto correspondientes a la situación de equilibrio.
- 2.º Si el precio sube a 32, comprobar si se recupera o no el equilibrio inicial del mercado.

Solución

- 1.º El mercado estará en equilibrio cuando la oferta sea igual a la demanda, $x^o = x^d$.

$$\underbrace{5p - 100}_{\text{OFERTA}} = \underbrace{200 - 5p}_{\text{DEMANDA}} \Rightarrow \begin{cases} p_e = 30 \\ x_e = 50 \end{cases}$$



- 2.º Vamos a comprobar si se vuelve a la situación de equilibrio cuando aumenta el precio, situándose por encima del de equilibrio.

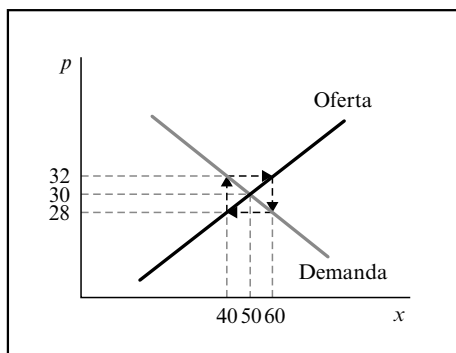
Si el precio es igual a 32, a este precio los productores ofrecerán la cantidad $x^o = 60$ ($x^o = 5 \cdot 32 - 100 = 60$).

Los consumidores adquirirán esta cantidad, 60 unidades de producto, al precio $p = 28$ ($60 = 200 - 5p \Rightarrow p = 28$).

Para $p = 28$ la cantidad ofrecida es $x^o = 40$ ($x^o = 5 \cdot 28 - 100 = 40$) y los demandantes adquirirán esta cantidad, $x^o = 40$, al precio $p = 32$ ($40 = 200 - 5p \Rightarrow p = 32$).

En este caso, se observa que no se vuelve a la situación de equilibrio. La justificación se encuentra en que el valor de la elasticidad-precio de la oferta y la demanda (en valor absoluto) en el punto de equilibrio es la misma. Lo comprobamos:

$$E_p^{x^o} = \frac{p_e}{x_e} \cdot \frac{dx^o}{dp} = \frac{30}{50} \cdot 5 = 3 \quad \text{y} \quad |E_p^{x^d}| = \left| \frac{p_e}{x_e} \cdot \frac{dx^d}{dp} \right| = \frac{30}{50} \cdot 5 = 3 \Rightarrow E_p^{x^o} = |E_p^{x^d}|$$



- 5.2. Dada la función de demanda $x^d = \frac{100}{p^2} + 2$, califique de estable o inestable el equilibrio competitivo según las funciones de oferta:

$$\begin{cases} 1^\circ & p = \sqrt[3]{x^o} - 1 \\ 2^\circ & p = x^o - 25 \end{cases}$$

Solución

El equilibrio exige que la demanda sea igual a la oferta.

El equilibrio es **estable** cuando el valor de la pendiente de la curva de oferta es superior al valor absoluto de la pendiente de la curva de demanda, $\frac{dp}{dx^o} > \left| \frac{dp}{dx^d} \right|$. En caso contrario, si $\frac{dp}{dx^o} \leq \left| \frac{dp}{dx^d} \right|$, el equilibrio se dice que es inestable si es menor y neutro si es igual.

Si comparamos las **elasticidades-precio de la demanda** en valor absoluto,

$$|E_p^{x^d}(x)| = \left| \frac{dx^d}{dp} \cdot \frac{p}{x^d} \right| = \left| \frac{1}{\frac{dp}{dx^d}} \cdot \frac{p}{x^d} \right|$$

con la **elasticidades-precio de la oferta**

$$E_p^{x^o}(x) = \frac{dx^o}{dp} \cdot \frac{p}{x^o} = \frac{1}{\frac{dp}{dx^o}} \cdot \frac{p}{x^o}$$

en el punto de equilibrio, éste será estable cuando $E_p^{x^o}(x) < |E_p^{x^d}(x)|$, inestable si $E_p^{x^o}(x) > |E_p^{x^d}(x)|$ y neutro si es igual, $E_p^{x^o}(x) = |E_p^{x^d}(x)|$.

- 1.º El equilibrio de la función de demanda $x^d = \frac{100}{p^2} + 2$ con la función de oferta $p = \sqrt[3]{x^o} - 1$, se producirá cuando la demanda sea igual a la oferta.

Despejando p en la función de demanda $x^d = \frac{100}{p^2} + 2 \Rightarrow p = \sqrt{\frac{100}{x^d - 2}}$ e igualando las funciones de demanda y oferta:

$$p = \underbrace{\sqrt{\frac{100}{x - 2}}}_{\text{demanda}} = \underbrace{\sqrt[3]{x} - 1}_{\text{oferta}} \Rightarrow \begin{cases} p_e = 2 \\ x_e = 27 \end{cases}$$

El equilibrio con la función de oferta $p = \sqrt[3]{x^o} - 1$, se produce en el punto (27, 2).

La pendiente de la función de oferta $p = \sqrt[3]{x^o} - 1$ es $\frac{dp}{dx^o} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, y en el punto (27, 2) es $\frac{dp}{dx^o}(27) = \frac{1}{27} = 0,037$.

El valor absoluto de la pendiente de la curva de demanda $x^d = \frac{100}{p^2} + 2$ es $\left| \frac{dp}{dx^d} \right| = \frac{1}{\left| \frac{dx^d}{dp} \right|} = \frac{1}{\left| \frac{-200}{p^3} \right|} = \frac{p^3}{200}$. En el punto (27, 2) es 0,04.

De forma que en el punto (27, 2) el equilibrio es **inestable**, ya que el valor de la pendiente de la curva de oferta, 0,037, es menor que el valor absoluto de la pendiente de la curva de demanda, 0,04.

Si ahora comparamos las **elasticidades respecto al precio de la demanda y la oferta**, tendremos:

La función elasticidad de la demanda es $|E_p^{x^d}(x)| = \left| \frac{dx^d}{dp} \cdot \frac{p}{x^d} \right|$.

$$|E_p^{x^d}(x)| = \left| \frac{dx^d}{dp} \cdot \frac{p}{x^d} \right| = \frac{200}{p^3} \cdot \frac{p}{x^d} = \frac{200}{p^2 x^d} \Rightarrow |E_p^{x^d}(27, 2)| = \frac{200}{4 \cdot 27} = 1,85$$

La función elasticidad de la oferta $[p = \sqrt[3]{x^o} - 1 \Rightarrow x = (p + 1)^3]$ es:

$$E_p^{x^o}(x) = \frac{dx^o}{dp} \cdot \frac{p}{x^o} = 3(p+1)^2 \cdot \frac{p}{x} \Rightarrow E_p^{x^o}(27,2) = 3(2+1)^2 \cdot \frac{2}{27} = 2$$

En el punto (27, 2) se verifica que la elasticidad-precio de la demanda (en valor absoluto) es menor que la elasticidad-precio de la oferta. Esta es otra forma de comprobar que el equilibrio con esta función de oferta es **inestable**.

2.º El equilibrio con la función de oferta $p = x^o - 25$ se produce cuando:

$$p = \underbrace{\sqrt{\frac{100}{x^d - 2}}}_{\text{Demanda}} = \underbrace{x^o - 25}_{\text{oferta}} \Rightarrow \begin{cases} p = 2 \\ x = 27 \end{cases}$$

El equilibrio con la función de oferta $p = x^o - 25$ se produce en el punto (27, 2).

La pendiente de la oferta es $\frac{dp}{dx^o} = 1$, y en el punto (27, 2) es $\frac{dp}{dx^o} = 1$.

El valor absoluto de la pendiente de la curva de demanda, $\left| \frac{dp}{dx^d} \right| = \frac{1}{\left| \frac{dx^d}{dp} \right|} = \frac{1}{\left| \frac{-200}{p^3} \right|} = \frac{p^3}{200}$. En el punto (27, 2) es 0,04.

La pendiente de la función de oferta, $\frac{dp}{dx^o} = 1$, es mayor que el valor absoluto de la pendiente de la función de demanda, 0,04, en el punto de equilibrio (27, 2), por lo que el equilibrio es **estable**.

Analizamos las elasticidades de las funciones de oferta y demanda en el punto de equilibrio (27, 2):

La función elasticidad-precio de la demanda es:

$$\left| E_p^{x^d}(x) \right| = \left| \frac{dx^d}{dp} \cdot \frac{p}{x^d} \right| = \frac{200}{p^3} \cdot \frac{p}{x^d} = \frac{200}{p^2 x^d}$$

La elasticidad de la demanda en (27,2) es:

$$\left| E_p^{x^d}(27,2) \right| = \frac{200}{4 \cdot 27} = 1,85$$

La función elasticidad de la oferta es $E_p^{x^o}(x) = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x} = \frac{p}{p+25}$

La elasticidad de la oferta en (27, 2) es $E_p^{x^o}(2) = \frac{2}{27} \cdot 1 = 0,074$

En el punto (27, 2) el equilibrio es estable, ya que, en este caso, la elasticidad-precio de la demanda en valor absoluto es mayor que la elasticidad-precio de la oferta.

5.3. Las funciones de oferta y demanda de un mercado en competencia perfecta son: $x^o = 5p - 10$ y $x^d = 200 - 25p$, respectivamente. Calcule el excedente total que se obtiene en el punto de equilibrio y compárelo con el excedente total que se obtendría a un precio inferior al de equilibrio.

Solución

El punto de equilibrio del mercado se obtiene igualando las funciones de oferta y demanda o resolviendo el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x^d = x^o \\ x^d = 200 - 25p \\ x^o = 5p - 10 \end{array} \right\} \Rightarrow 200 - 25p = 5p - 10 \Rightarrow \begin{cases} p_e = 7 \\ x_e = 25 \end{cases}$$

En el punto de equilibrio el precio es $p_e = 7$.

Calculemos, para el precio $p = 7$, el excedente del consumidor, sabiendo que la máxima disposición a pagar de los consumidores en este mercado es para $p = 8$ (obtenido sustituyendo x por cero en la función de demanda $x^d = 200 - 25p$).

$$0 = 200 - 25p \Rightarrow p = \frac{200}{25} = 8$$

Si $p = 7 \Rightarrow x^d = 200 - 25 \cdot 7 = 25 = x^e$, la cantidad que se ofrece al precio de equilibrio es igual a 25 unidades.

$$EC = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{25 \cdot (8 - 7)}{2} = \frac{25 \cdot 1}{2} = 12,5$$

Calculemos el excedente del productor (el precio a partir del cual la empresa ofrece es para $p = 2$ (obtenido sustituyendo x por cero en la función de oferta, $x^o = 5p - 10$).

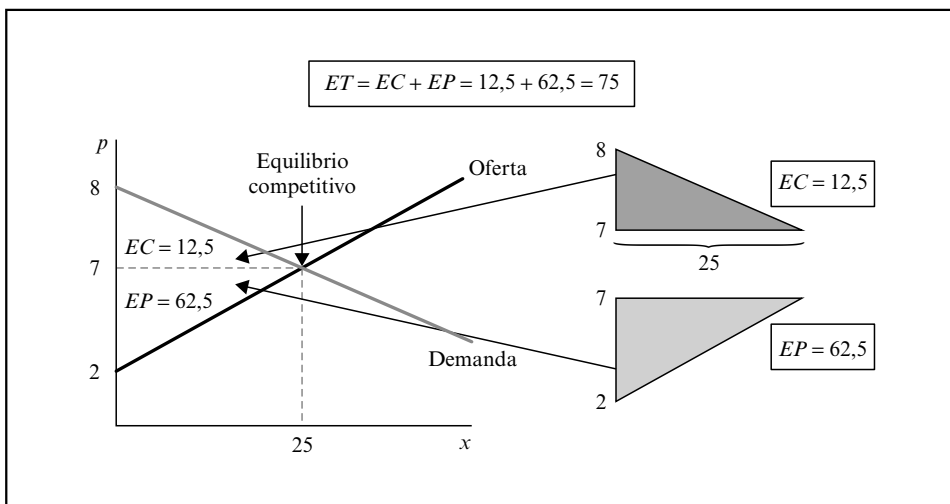
$$0 = 5p - 10 \Rightarrow p = \frac{10}{5} = 2$$

$$EP = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{25 \cdot (7 - 2)}{2} = \frac{25 \cdot 5}{2} = 62,5$$

Siendo $x^o = 5 \cdot 7 - 10 = 25 = x_e$ la cantidad que se ofrece al precio de equilibrio.

$$EP = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{25 \cdot (7 - 2)}{2} = \frac{25 \cdot 5}{2} = 62,5$$

En el equilibrio, el excedente total es: $ET = EC + EP = 12,5 + 62,5 = 75$

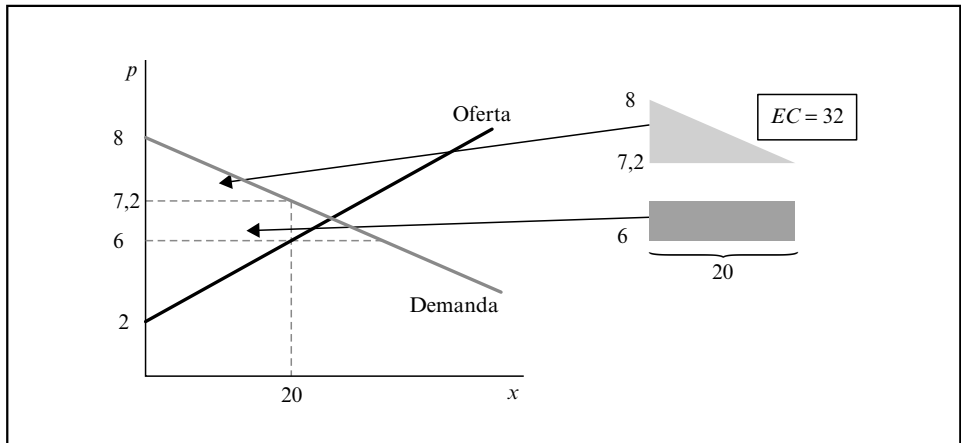


Calculemos para el precio $p = 6$ (inferior al de equilibrio) el excedente del consumidor.

Si $p = 6 \Rightarrow x^o = 5 \cdot 6 - 10 = 20$, los productores están dispuestos a ofrecer 20 unidades de producto. Sustituyendo esta cantidad, $x = 20$, en la función de demanda, $x^d = 200 - 25p \Rightarrow 20 = 200 - 25p \Rightarrow p = \frac{180}{25}$, obtenemos $p = 7,2$, que es el precio que los demandantes están dispuestos a pagar para adquirir la cantidad $x^d = 20$. Calculamos el excedente del consumidor cuando $x^d = 20$ y $p = 6$.

$$EC_{p=6} = \underbrace{\left(\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} \right)}_{\text{triángulo}} + \underbrace{(\text{base} \cdot \text{altura})}_{\text{rectángulo}} = \frac{20 \cdot (8 - 7,2)}{2} + 20 \cdot (7,2 - 6) = 32$$

El excedente del consumidor es mayor, al ser el precio menor. El siguiente gráfico muestra cómo se ha calculado el excedente del consumidor.



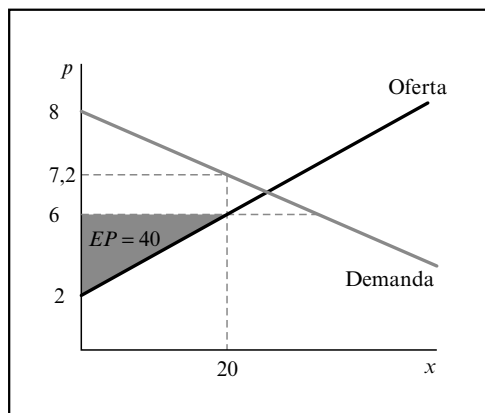
El excedente del productor, siendo $x^o = 5 \cdot 6 - 10 = 20$ la cantidad que se ofrece al precio $p = 6$, será:

$$EP_{p=6} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{20 \cdot (6 - 2)}{2} = \frac{20 \cdot 4}{2} = 40$$

El excedente del productor es menor, al ser menor el precio. El siguiente gráfico muestra cómo se ha calculado el excedente del productor.

Cuando $p = 6$, el excedente total es:

$$ET_{p=6} = EC_{p=6} + EP_{p=6} = 32 + 40 = 72 < 75 = \text{excedente total en el equilibrio.}$$

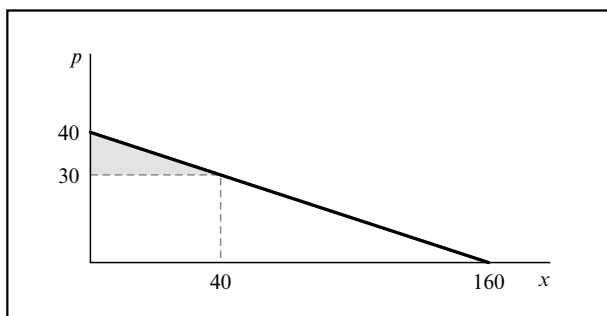


- 5.4.** La función de demanda de un consumidor es $p = 40 - \frac{x}{4}$. Halle el excedente del consumidor cuando la cantidad demandada es $x = 40$.

Solución

$$\text{De } p = 40 - \frac{x}{4} \Rightarrow x = 160 - 4p$$

Cuando $x = 40 \Rightarrow p = 30$ y si $x = 0 \Rightarrow p = 40$.



$$\int_{30}^{40} (160 - 4p) dp = [160p - 2p^2]_{30}^{40} = 200$$

Como la función de demanda es lineal, otra forma de obtener el excedente del consumidor es calculando el área del triángulo sombreado:

$$EC = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{40 \cdot (40 - 30)}{2} = \frac{40 \cdot 10}{2} = 200$$

- 5.5.** La función de demanda de un consumidor es $4^{p^{1/2}} = 64^{10/x}$. Determine el incremento que experimenta el excedente del consumidor cuando la cantidad demandada varía de 5 a 10 unidades.

Solución

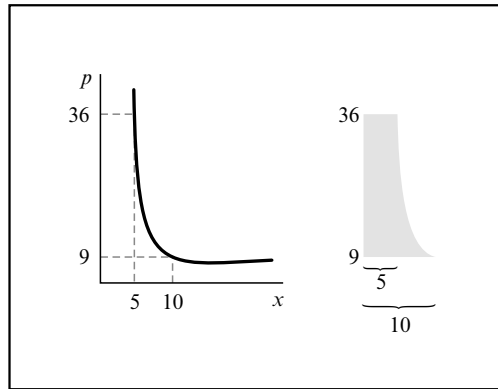
$$4^{p^{1/2}} = 64^{10/x} \Rightarrow 4^{p^{1/2}} = (4^3)^{10/x} = 4^{30/x} \Rightarrow p^{1/2} = \frac{30}{x} \Rightarrow x = \frac{30}{p^{1/2}}$$

El excedente del consumidor es el área sombreada de la gráfica siguiente.

$$\text{Si } x = 5 \Rightarrow p^{1/2} = \frac{30}{5} = 6 \Rightarrow p = 6^2 \Rightarrow p = 36$$

$$\text{Si } x = 10 \Rightarrow p^{1/2} = \frac{30}{10} = 3 \Rightarrow p = 3^2 \Rightarrow p = 9$$

$$\text{Variación del excedente del consumidor} = \int_9^{36} \frac{30}{p^{1/2}} dp = \left[60 \sqrt{p} \right]_9^{36} = 180$$



- 5.6.** La función de demanda de un bien X, en un mercado en competencia perfecta, viene dada por $x^d = 10 - p$, y la función de oferta de la empresa por $x^o = p^2 + 8$. Determine:
- 1.º El equilibrio del mercado.
 - 2.º El excedente del consumidor en el punto de equilibrio.
 - 3.º El excedente del productor en el punto de equilibrio.
 - 4.º El excedente total en el equilibrio.

Solución

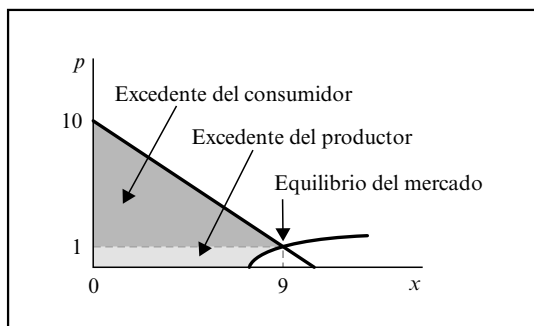
1.º El equilibrio del mercado se encuentra para los valores $p_e = 1$ y $x_e = 9$, solución del sistema:

$$\begin{cases} x^d = x^o \\ x^d = 10 - p \\ x^o = p^2 + 8 \end{cases}$$

2.º El excedente del consumidor en el punto de equilibrio calculado anteriormente es: $EC = \int_1^{10} (10 - p) dp = \left[10p - \frac{p^2}{2} \right]_1^{10} = \frac{81}{2} = 40,5$

3.º El excedente del productor en el punto de equilibrio calculado anteriormente es: $EP = \int_0^1 (p^2 + 8) dp = \left[\frac{p^3}{3} + 8p \right]_0^1 = \frac{25}{3} = 8,33$

4.º El excedente total: $ET = EC + EP = \frac{81}{2} + \frac{25}{3} = \frac{293}{6} = 48,83$



5.7. Las funciones de demanda y oferta de un mercado en competencia perfecta son:

$$\begin{cases} x^d + (p + 1)^2 = 25 \\ x^o - p^2 = 0 \end{cases}$$

Determine:

- 1.º El equilibrio del mercado.
- 2.º El excedente del consumidor en el equilibrio.
- 3.º El excedente del productor en el equilibrio.
- 4.º El excedente total en el equilibrio.

Solución

1.º El equilibrio del mercado: $p_e = 3$ y $x_e = 9$, solución del sistema

$$\begin{cases} x^d = x^o \\ x^d + (p + 1)^2 = 25 \text{ si } p > 0 \text{ y } x > 0. \\ x^o - p^2 = 0 \end{cases}$$

2.º El excedente del consumidor en el punto (3, 9) obtenido previamente es:

$$EC = \int_3^4 [25 - (p+1)^2] dp = \left[25p - \frac{(p+1)^3}{3} \right]_3^4 = \frac{14}{3}$$

3.º El excedente del productor: $EP = \int_0^3 p^2 dp = \left[\frac{p^3}{3} \right]_0^3 = 9$

4.º El excedente total: $ET = EC + EP = \frac{14}{3} + 9 = \frac{41}{3} = 13,67$

