

PROBLEMAS RESUELTOS

4.1. Dada la función de costes totales de una empresa que opera en un mercado de competencia perfecta, $C_T(x) = x^3 - 12x^2 + 48x + 256$.

- 1.º Determine la cantidad mínima de producto que ofrecerá la empresa y el beneficio que obtiene con esa producción.
- 2.º Determine la función de oferta.
- 3.º Determine el beneficio que obtendría la empresa si produjera en el óptimo de explotación.

Solución

- 1.º La cantidad mínima de producto, x , que ofertará la empresa será la correspondiente al mínimo de explotación que determina el punto de cierre. Es decir, se ha de cumplir la igualdad $C' = CMg = C_V Me = C_V^*$ (o mínimo C_V^*).

$$\underbrace{3x^2 - 24x + 48}_{C' = CMg} = \underbrace{\frac{x^3 - 12x^2 + 48x}{x}}_{C_V^* = C_V Me} = \underbrace{x^2 - 12x + 48}_{C_V^* = C_V Me}$$

$$\underbrace{3x^2 - 24x + 48}_{C' = CMg} = \underbrace{x^2 - 12x + 48}_{C_V^* = C_V Me} \Rightarrow 2x^2 - 12x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 0 \end{cases}$$

$x = 6$ unidades de producto es la cantidad a partir de la cual la empresa comenzará a producir. El beneficio que obtiene en ese caso es:

$$B(6) = IT(6) - C_T(6) = \underbrace{6 \cdot (3 \cdot 6^2 - 24 \cdot 6 + 48)}_{\substack{p(12) = C'(12) = CMg(12) \\ IT(6) = 72}} - \underbrace{(8 \cdot 6^3 - 12 \cdot 6^2 + 48 \cdot 6 + 256)}_{C_T(6) = 328}$$

$B(6) = -256 < 0$. Si la empresa no produjera, perdería sus costes fijos, y si la empresa produjera la cantidad $x = 6$ perdería lo mismo.

- 2.º La función de oferta coincide con la función de costes marginales a partir de que el precio de mercado sea igual o mayor que el mínimo del coste variable medio (es decir, para $x = 6$). Para esa cantidad, el precio de mercado que acepta la empresa ha de ser:

$$p_m = C_V Me(6) = 6^2 - 12 \cdot 6 + 48 = 12$$

La función de oferta de la empresa es: $p_m = 3x^2 - 24x + 48 \quad \forall \quad p_m \geq 12$.

- 3.º En el óptimo de explotación se ha de cumplir que $C' = C_T^*$ ($CMg = C_T Me$) (o que C_T^* sea mínimo):

$$\underbrace{3x^2 - 24x + 48}_{C' = CMg} = \underbrace{\frac{x^3 - 12x^2 + 48x + 256}{x}}_{C_T^* = C_T Me} = \underbrace{x^2 - 12x + 48 + \frac{256}{x}}_{C_T^* = C_T Me} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^3 - 24x^2 + 48x = x^3 - 12x^2 + 48x + 256 \Rightarrow 2x^3 - 12x^2 - 256 = 0 \Rightarrow x = 8$$

La cantidad ofrecida en el óptimo de explotación es 8 unidades de producto. El precio de mercado para 8 unidades de producto se calcula sustituyendo $x = 8$ en la función de oferta, $p_m = 3x^2 - 24x + 48$, y obtendremos

$$p_m = 3 \cdot 8^2 - 24 \cdot 8 + 48 \Rightarrow p = 48 \text{ u.m.}$$

El beneficio que obtiene la empresa en esta situación es:

$$B(8) = IT(8) - C_T(8) = \underbrace{8 \cdot \underbrace{(3 \cdot 8^2 - 24 \cdot 8 + 48)}_{\substack{x \\ p(8) = C'(8)}}}_{IT(8)} - \underbrace{(8 \cdot 8^3 - 12 \cdot 8^2 + 48 \cdot 8 + 256)}_{C_T(8)} = 0$$

A este punto se le llama también **punto de nivelación**.

4.2. Si la función de costes totales de una empresa perfectamente competitiva es $C_T(x) = xe^{x^2-6x+10} + 20$.

- 1.º Determine la función de oferta de la empresa.
- 2.º Determine para qué precio del producto la empresa sólo pierde los costes fijos.

Solución

- 1.º La función de oferta será la de costes marginales a partir del mínimo de explotación: $CMg = e^{x^2-6x+10} + x(2x-6)e^{x^2-6x+10} = e^{x^2-6x+10}(2x^2-6x+1) = p_m$ a partir del mínimo $C_V Me = C_V^* = e^{x^2-6x+10}$.

Condición necesaria de mínimo:

$$\frac{dC_V Me}{dx} = e^{x^2-6x+10}(2x-6) = 0 \Rightarrow x = 3$$

Condición suficiente de mínimo:

$$\frac{d^2 C_V Me}{dx^2}(3) > 0$$

$$\frac{d^2 C_V Me}{dx^2} = e^{x^2-6x+10}(2x-6) + 2e^{x^2-6x+10} = e^{x^2-6x+10}(2x-4) > 0 \quad \text{si } x = 3$$

El precio de mercado a partir del cual comienza a ofrecer la empresa es:

$$p_m = C_V Me(3) = C_V^*(3) = e^{3^2-6 \cdot 3+10} = e$$

Y la función de oferta a corto plazo de la empresa es:

$$p_m = e^{x^2-6x+10}(2x^2-6x+1) \quad \forall \quad p \geq e$$

2.º La empresa sólo pierde los costes fijos cuando $B(x) = -C_F$ o $IT = C_V$

$$B(x) = IT - C_T = IT - (C_F + C_V) = -C_F \Rightarrow IT - C_V = 0 \Rightarrow IT = C_V$$

$$\frac{xp_m}{IT} = C_V \Rightarrow \frac{p_m}{CMg} = \frac{C_V}{x} = C_V Me \Rightarrow CMg = C_V Me$$

$$\underbrace{e^{x^2-6x+10}(2x^2-6x+1)}_{CMg} = \underbrace{e^{x^2-6x+10}}_{C_V Me} \Rightarrow 2x^2-6x+1=1 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=0 \end{cases}$$

Resultado que coincide con el del apartado anterior (es el punto de cierre).

4.3. Dada la función de costes totales de una empresa perfectamente competitiva $C_T(x) = x^3 + 10x + 1.600$, determine el precio que proporciona a la empresa un beneficio extraordinario de 400 u.m.

Solución

La función de beneficio de la empresa es:

$$B(x) = IT(x) - C_T(x) = p_m \cdot x - C_T(x)$$

Como en la empresa perfectamente competitiva la función de oferta viene dada por:

$$p_m = CMg = 3x^2 + 10x$$

Sustituyendo en $B(x) = p_m \cdot x - C_T(x) = CMg \cdot x - C_T(x)$ p_m por $CMg = 3x^2 + 10x$.

$$B(x) = IT(x) - C_T(x) = \underbrace{(3x^2 + 10) \cdot x}_{p_m=CMg} - \underbrace{(x^3 + 10x + 1.600)}_{C_T} = \underbrace{400}_{B(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^3 = 2.000 \Rightarrow x^3 = \frac{2.000}{2} = 1.000 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow p_m = 310 \text{ u.m.}$$

- 4.4. Dadas las funciones de costes totales de tres empresas que producen el mismo producto X y que operan en un mercado de competencia perfecta:

$$\begin{cases} C_1(x) = 2x^2 + 12x + 60 \\ C_2(x) = x^2 + x + 10 \\ C_3(x) = x^2 + 10x + 50 \end{cases}$$

Determine:

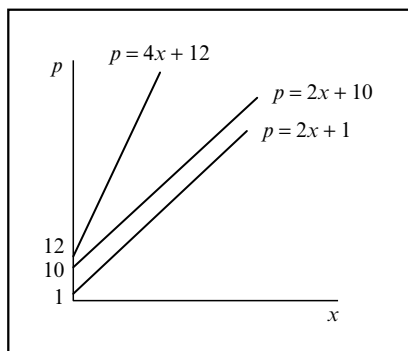
- 1.º La función de oferta de cada una de ellas.
- 2.º La función de oferta del mercado.

Solución

- 1.º Las funciones de oferta serán las siguientes funciones de costes marginales a partir del mínimo de explotación.

$$\begin{cases} CMg_1(x) = 4x + 12 \Rightarrow p_m = 4x + 12 \quad \forall \quad p_m \geq 12 \\ CMg_2(x) = 2x + 1 \Rightarrow p_m = 2x + 1 \quad \forall \quad p_m \geq 1 \\ CMg_3(x) = 2x + 10 \Rightarrow p_m = 2x + 10 \quad \forall \quad p_m \geq 10 \end{cases}$$

Los mínimos de explotación de las tres empresas corresponden a la producción nula ($x = 0$), por lo que las curvas de oferta parten de sus respectivas ordenadas en el origen.



- 2.º La función de oferta del mercado es la suma de la función de oferta de las tres empresas para cada precio. Para poder realizar esta suma es necesario escribir las funciones considerando p como variable independiente.

Maximización del beneficio de la empresa perfectamente competitiva...

$$\begin{cases} p = 4x + 12 \Rightarrow x = \frac{p-12}{4} & \forall \quad p > 12 \\ p = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{p-1}{2} & \forall \quad p > 1 \\ p = 2x + 10 \Rightarrow x = \frac{p-10}{2} & \forall \quad p > 10 \end{cases}$$

Si $1 < p < 10$ la función de oferta del mercado es $x = \frac{p-1}{2} \quad \forall \quad 1 < p < 10$, la de la única empresa que ofrece cuando $1 < p < 10$.

Si $10 \leq p < 12$ la función de oferta del mercado es $x = \frac{2p-11}{2} \quad \forall \quad 10 \leq p < 12$, que se obtiene sumando, para cada precio, p_m , las ofertas de las dos empresas que ofrecen cuando $10 \leq p < 12$, $x = \frac{p-1}{2} + \frac{p-10}{2} = \frac{2p-11}{2}$.

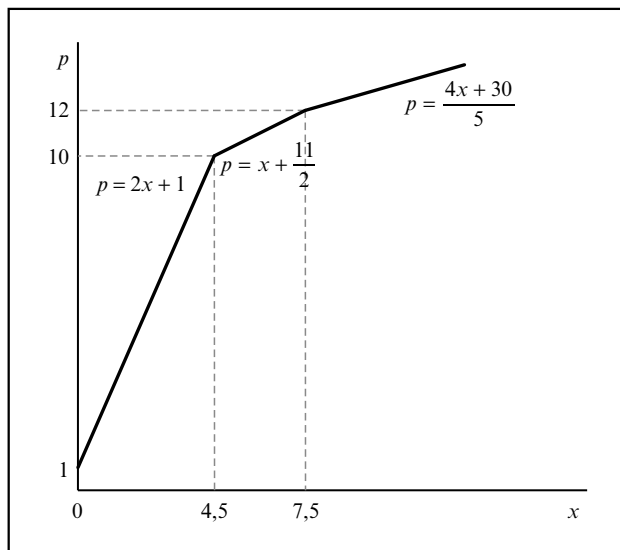
Si $p \geq 12$ la función de oferta del mercado es $x = \frac{5p-30}{4} \quad \forall \quad p \geq 12$, obtenida sumando para cada p las ofertas de las tres empresas que ofrecen cuando $p \geq 12$, $x = \frac{p-12}{4} + \frac{p-1}{2} + \frac{p-10}{2} = \frac{5p-30}{4}$.

La función de oferta total del mercado en función de p es:

$$x = \begin{cases} \frac{p-1}{2} & \forall \quad 1 < p < 10 \\ \frac{2p-11}{2} & \forall \quad 10 \leq p < 12 \\ \frac{5p-30}{4} & \forall \quad p \geq 12 \end{cases}$$

La función de oferta total del mercado en función de x es:

$$p = \begin{cases} 2x + 1 & \forall \quad 1 < p < 10 \\ x + \frac{11}{2} & \forall \quad 10 \leq p < 12 \\ \frac{4x + 30}{5} & \forall \quad p \geq 12 \end{cases}$$



4.5. Un mercado de competencia perfecta está formado por n empresas. Las funciones de demanda y oferta de este mercado vienen determinadas por: $x^d = 58 - \frac{1}{5}p$ y $p = 4 + \frac{1}{2}x^o$, respectivamente. Una empresa cuya función de costes a largo plazo es $C_{LP}(x) = 4x^3 - 40x^2 + 130x$.

- 1.º ¿Qué cantidad ofrecerá en el equilibrio a largo plazo?
- 2.º ¿Será una empresa representativa del equilibrio a largo plazo?
- 3.º Suponga que las n empresas que componen este mercado tienen la misma función de coste total a largo plazo. ¿Cuántas empresas componen este mercado?

Solución

- 1.º En el equilibrio a largo plazo, la empresa produce el volumen de producción correspondiente a su dimensión óptima, es decir, en el mínimo de sus costes medios a largo plazo (CMe_{LP}). Determinamos los costes medios a largo plazo:

$$CMe_{LP} = \frac{C_{LP}}{x} = 4x^2 - 40x + 130$$

$$\text{Calculemos el mínimo de } CMe_{LP} = \frac{C_{LP}}{x} = 4x^2 - 40x + 130.$$

Maximización del beneficio de la empresa perfectamente competitiva...

La condición necesaria o de primer orden: $\frac{dCMe_{LP}}{dx} = 8x - 40 = 0 \Rightarrow x = 5$ unidades de producto es la cantidad que la empresa produce en el equilibrio a largo plazo.

La condición suficiente o de segundo orden: $\frac{d^2CMe_{LP}}{dx^2} = 8 > 0$ garantiza que se trata de un mínimo.

- 2.º Para determinar si esta empresa es representativa del equilibrio a largo plazo se ha de verificar, además, que el precio del mercado sea igual al coste marginal de la empresa en el largo plazo ($p = CMg_{LP}$). No se conoce el precio de equilibrio del mercado, pero sí las funciones de oferta y demanda que nos permiten calcular el equilibrio del mercado, $x^d = x^o$:

$$\underbrace{58 - \frac{1}{5} \cdot p}_{x^d = DEMANDA} = \underbrace{2 \cdot p - 8}_{x^o = OFERTA} \Rightarrow p = 30 \text{ u.m. es el precio de equilibrio del mercado.}$$

El coste marginal a largo plazo de la empresa en el volumen de producción correspondiente al equilibrio de la empresa:

$$CMg_{LP} = \frac{dC_{LP}}{dx} = 12x^2 - 80x + 130$$
$$CMg_{LP}(5) = 12 \cdot 5^2 - 80 \cdot 5 + 130 = 30 \Rightarrow CMg_{LP} = 30 = p$$

Coincide con el precio de equilibrio del mercado ($p = 30$), de forma que se trata de una empresa representativa del equilibrio a largo plazo.

Comprobamos, además, que el beneficio que obtiene la empresa para ese volumen de producción es normal o nulo, para ratificar que se trata de una empresa representativa del equilibrio a largo plazo:

$$IT(5) = p \cdot x = 30 \cdot 5 = 150$$
$$C_T(5) = 4x^3 - 40x^2 + 130x = 4 \cdot 5^3 - 40 \cdot 5^2 + 130 \cdot 5 = 150$$
$$B(5) = IT(5) - C_T(5) = 0$$

El beneficio que obtiene la empresa en el equilibrio es normal ($B = 0$), lo que también garantiza que es una empresa representativa del equilibrio a largo plazo.

- 3.º Sustituyendo el precio obtenido ($p = 30$) en la función de oferta o en la función de demanda, se obtiene la cantidad de equilibrio del mercado $x = 52$, de forma

que si todas las empresas que componen la industria tuvieran la misma función de costes, el mercado estaría abastecido por $n = \frac{52}{5}$ (redondeamos a 10 empresas).

4.6. La función de oferta de una empresa es $p = 3x^2 - 20x + 50 \quad \forall \quad x > \frac{10}{3}$. Determine:

1.º La función elasticidad-precio de la oferta.

2.º Diga para qué valores de x la oferta es elástica, rígida y unitaria.

Solución

1.º La función elasticidad-precio de la oferta (para cualquier valor de p) es la siguiente:

$$E_p^{x^o} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x} = \frac{1}{\frac{dp}{dx}} \cdot \frac{p}{x} = \frac{1}{6x - 20} \cdot \frac{3x^2 - 20x + 50}{x} = \frac{3x^2 - 20x + 50}{6x^2 - 20x}$$

$$2.º \quad E_p^{x^o} = \frac{3x^2 - 20x + 50}{6x^2 - 20x} = 1 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{50}{3}}. \text{ La oferta es unitaria si } x = \sqrt{\frac{50}{3}}.$$

$$\text{La oferta es elástica si } E_p^{x^o} > 1 \quad \forall \quad \frac{10}{3} < x < \sqrt{\frac{50}{3}}.$$

$$\text{La oferta es inelástica o rígida si } E_p^{x^o} < 1 \quad \forall \quad x > \sqrt{\frac{50}{3}}.^1$$

¹ Se recomienda al alumno que verifique estos resultados sustituyendo en la función de elasticidad-precio de la oferta con diferentes precios.

Maximización del beneficio de la empresa perfectamente competitiva...

