

PROBLEMAS RESUELTOS

3.1. Dada la función de demanda inversa, $p(x)$, del mercado de un bien X por la expresión

$$p = -\frac{1}{10}x^2 + 20, \text{ determine:}$$

- 1.º La función de ingreso total.
- 2.º La función de ingreso medio.
- 3.º La función de ingreso marginal.

Solución

1.º La función de ingreso total es:

$$IT(x) = p \cdot x = \left(-\frac{1}{10}x^2 + 20\right) \cdot x = 20x - \frac{x^3}{10}$$

2.º La función de ingreso medio es:

$$IMe(x) = \frac{IT(x)}{x} = \frac{20x - \frac{x^3}{10}}{x} = 20 - \frac{x^2}{10} = p(x)$$

3.º La función de ingreso marginal es:

$$IMg(x) = \frac{dIT(x)}{dx} = 20 - \frac{3x^2}{10}$$

3.2. Conocida la función de demanda inversa de un bien X , $p(x) = -\frac{1}{30}x^2 + 20$, y la función de costes totales a corto plazo de una empresa, $C_T(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{281}{10}x + 100$, determine:

- 1.º La cantidad, x , que producirá la empresa para obtener el máximo beneficio (o del equilibrio de la empresa).
- 2.º El beneficio máximo.

Solución

- 1.º Calculemos el máximo de la función $B(x) = IT(x) - C_T(x)$, que equivale a la igualdad $IMg = CMg$:

$$B(x) = \underbrace{\left(-\frac{1}{30}x^2 + 20\right)}_{p(x)}x - \underbrace{\left(-\frac{x^3}{3} + \frac{281}{10}x + 100\right)}_{C_T(x)}$$

$$\text{Máximo } B(x) = \underbrace{\left(-\frac{1}{30}x^2 + 20\right)}_{\substack{p(x) \\ IT}}x - \underbrace{\left(-\frac{x^3}{3} + \frac{281}{10}x + 100\right)}_{C_T(x)}$$

Condición necesaria de máximo $\frac{dB(x)}{dx} = 0 \Rightarrow IMg = CMg$:

$$IT(x) = px = \left(-\frac{1}{30}x^2 + 20\right)x \Rightarrow IMg = -\frac{x^2}{10} + 20$$

$$C_T(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{281}{10}x + 100 \Rightarrow CMg = -x^2 + \frac{281}{10}$$

$$\underbrace{-\frac{x^2}{10} + 20}_{IMg} = \underbrace{-x^2 + \frac{281}{10}}_{CMg} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x^* = 3} & \text{solución óptima} \\ (x = -3) & \text{solución no válida} \end{cases}$$

Condición suficiente de máximo $\frac{d^2B(x)}{dx^2} < 0$:

$$\frac{d^2B(x)}{dx^2} = -\frac{x}{5} - 2x \Rightarrow \frac{d^2B(3)}{dx^2} = -\frac{3}{5} - 2 \cdot 3 < 0$$

$$2.º \quad B(3) = \underbrace{\left(-\frac{3^2}{30} + 20\right)}_{IT(3)} \cdot 3 - \underbrace{\left(-\frac{3^3}{3} + \frac{281}{10} \cdot 3 + 100\right)}_{C_T(3)} = -\frac{1.162}{10} = -116,2 < 0$$

El beneficio cuando $x = 3$ es negativo, siendo la pérdida mayor que los costes fijos ($C_F = 100$), por la que la empresa decidirá no producir si la función de demanda es la considerada¹.

¹ Si la empresa decidiera producir, perdería, en este caso, los costes fijos y parte de los costes variables, mientras que si, como se indica en el ejercicio, no produjera, perdería solamente los cos-

- 3.3.** Dada la función de producción de una empresa $x = x(K, L) = LK - 16L^2 - 4K^2$. Determine la función de demanda de los factores L (factor trabajo) y K (factor capital) que maximizan el beneficio de la empresa a largo plazo, sabiendo que el precio unitario del producto X es igual a p (constante), el precio de L es w y el de K es r .

Solución

$$\text{Maximo}_{K,L} B = \underbrace{p \cdot (LK - 16L^2 - 4K^2)}_{IT(x)} - \underbrace{(wL + rK)}_{C_T(x)}$$

La condición de primer orden de máximo es:

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial L} = p \cdot (K - 32L) - w = 0 & \Rightarrow L = \frac{K}{32} - \frac{w}{32p} \\ \frac{\partial B}{\partial K} = p \cdot (L - 8K) - r = 0 & \Rightarrow K = \frac{L}{8} - \frac{r}{8p} \end{cases}$$

Estudiemos la condición de segundo orden.

La matriz $\begin{bmatrix} -32 & 1 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$ es definida negativa, ya que $-32 < 0$ y $\begin{vmatrix} -32 & 1 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} > 0$

La productividad marginal de L y K es decreciente, de forma que las funciones de demanda calculadas permiten maximizar el beneficio de la empresa a largo plazo.

tes fijos. Por ello se indica en el ejercicio que la empresa decidirá no producir. Sobre este aspecto se detallará más en los próximos capítulos.