PROBLEMAS RESUELTOS

2.1. Dada la función de producción $x = x(F_1,F_2) = F_1 \cdot F_2$, en la que F_1 y F_2 son los factores productivos, determine:

1.º La función de costes a largo plazo, sabiendo que los precios de los factores F_1 y F_2 son, respectivamente, $p_1 = 8$ u.m. y $p_2 = 40$ u.m.
2.º La función de costes medios a largo plazo.
3.º La función de costes marginales a largo plazo.
4.º Analice cómo son los rendimientos y los costes de producción.

Solución

1.º Los costes a largo plazo vendrán dados por una función, $C_{LP} = p_1F_1 + p_2F_2$, la cual recoge el conjunto de puntos de mínimo coste necesario para obtener cada cantidad de producto (resolución del problema primal de equilibrio del productor), dada una función de producción, en este caso $x = F_1 \cdot F_2$:

$C_{LP} = p_1F_1 + p_2F_2 \quad \Rightarrow \quad C_{LP} = 8F_1 + 40F_2$ (ambos factores productivos, F_1 y F_2, son variables).

Es un problema de optimización condicionada $\begin{cases} \underset{F_1,\,F_2}{\text{Mínimo}} & C_{LP} = 8F_1 + 40F_2 \\ s.a: & x = F_1 \cdot F_2 \end{cases}$

Formemos la ecuación de Lagrange: $L(F_1, F_2, \lambda) = 8F_1 + 40F_2 - \lambda(F_1 \cdot F_2)$.

Derivando $L(F_1, F_2, \lambda)$ respecto a F_1, F_2 y λ, e igualando estas derivadas a 0, obtendremos las condiciones necesarias de extremo relativo:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L(F_1,F_2,\lambda)}{\partial F_1} = 8 - \lambda F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{8}{F_2} \\ \dfrac{\partial L(F_1,F_2,\lambda)}{\partial F_2} = 40 - \lambda F_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{40}{F_1} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{8}{F_2} = \dfrac{40}{F_1} \Rightarrow F_1 = \dfrac{40 \cdot F_2}{8} = 5F_2 \\ \dfrac{\partial L(F_1,F_2,\lambda)}{\partial \lambda} = -F_1 \cdot F_2 = x \quad \Rightarrow \quad F_1 \cdot F_2 = x \end{cases}$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} F_1 = 5 \cdot F_2 \\ F_1 \cdot F_2 = x \end{cases} \Rightarrow \quad 5 \cdot F_2^2 = x \quad \Rightarrow \quad F_2^d = \sqrt{\frac{x}{5}} \quad \text{y} \quad F_1^d = 5\sqrt{\frac{x}{5}} = \sqrt{5x}$$

son las funciones de demanda de los factores productivos.

Sustituyendo en $C_{LP} = 8F_1^d + 40F_2^d$ las funciones de demanda obtenidas, tendremos la función de costes a largo plazo: $C_{LP} = 8\sqrt{5x} + 40\sqrt{\frac{x}{5}} = 16\sqrt{5x}$

¿Cumple la condición suficiente de mínimo relativo, $d^2L(F_1, F_2, \lambda) > 0$?

$$\begin{cases} d^2L(F_1, F_2, \lambda) = -2\lambda dF_1 dF_2 \\ F_1 \cdot F_2 = x \qquad \Rightarrow \qquad dx = F_2 dF_1 + F_1 dF_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad dF_1 = -\dfrac{F_1}{F_2} dF_2 \end{cases}$$

$$d^2L(F_1, F_2, \lambda) = -2\lambda dF_1 dF_2 = -2 \cdot \underbrace{\frac{40}{F_1}}_{\lambda} \cdot \underbrace{\left(-\frac{F_1}{F_2} dF_2\right)}_{dF_1} dF_2 = \frac{80}{F_2}(dF_2)^2 > 0 \quad \forall\, F_2 > 0$$

La condición suficiente de mínimo relativo se verifica.

De forma que la función de costes a largo plazo es $C_{LP} = 16\sqrt{5x}$

2.º La función de costes medios a largo plazo, CMe_{LP}, se obtiene del cociente $\frac{C_{LP}}{x}$: $CMe_{LP} = C_{LP}^* = \frac{C_{LP}}{x} = \frac{16\sqrt{5x}}{x} = 16\sqrt{\frac{5}{x}}$

La función de costes medios a largo plazo es $CMe_{LP} = C_{LP}^* = 16\sqrt{\frac{5}{x}}$

3.º La función de costes marginales a largo plazo, CMg_{LP}, se obtiene derivando la función de coste total a largo plazo: $\frac{dC_{LP}}{dx} = CMg_{LP} = C'_{LP} = 8\sqrt{\frac{5}{x}}$

4.º La función de producción $x = x(F_1, F_2) = F_1 \cdot F_2$ es una función homogénea de grado $2 > 1$, por lo que los rendimientos son crecientes a escala y, como consecuencia, un aumento proporcional de la cantidad empleada de los factores provoca un aumento proporcionalmente mayor de la producción y, por tanto, un aumento proporcionalmente menor de los costes.

En efecto, la función de costes a largo plazo calculada anteriormente es $C_{LP} = 16\sqrt{5x}$. Si, por ejemplo, se duplica la producción, $C_{LP}(2x) = 16\sqrt{2 \cdot 5x} = \sqrt{2} \cdot 16\sqrt{5x} = \sqrt{2} \cdot C_{LP}(x)$, los costes se multiplican por $\sqrt{2}$, creciendo en menor proporción que la cantidad producida.

Las curvas de coste total medio a largo plazo, $CMe_{LP} = C_{LP}^* = 16\sqrt{\frac{5}{x}}$, y coste marginal a largo plazo, $CMg_{LP} = C'_{LP} = 8\sqrt{\frac{5}{x}}$, son decrecientes y por ello tienen pendiente negativa.

El coste marginal a largo plazo es inferior al coste total medio a largo plazo, $CMg_{LP} = 8\sqrt{\frac{5}{x}} < 16\sqrt{\frac{5}{x}} = CMe_{LP}$.

2.2. Dada la función de producción de una empresa $x = x(F_1, F_2) = F_1^2 \cdot F_2^2$ y los precios de los factores productivos $p_1 = 10$ de F_1 y $p_2 = 20$ de F_2, calcule la máxima cantidad de producto que puede obtenerse con un coste igual a 10.000 unidades monetarias.

Solución

El problema (dual) consiste en: $\begin{cases} \underset{F_1, F_2}{\text{Máximo}} \quad x = F_1^2 F_2^2 \\ s.a. \quad 10F_1 + 20F_2 = 10.000 \end{cases}$

Formemos la ecuación de Lagrange:

$$L(F_1, F_2, \mu) = F_1^2 F_2^2 - \mu(10F_1 + 20F_1 - 10.000)$$

Condición **necesaria** de extremo:

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} \frac{\partial L(F_1,F_2,\mu)}{\partial F_1} &= 2F_1F_2^2 - 10\mu = 0 \Rightarrow \mu = \frac{2F_1F_2^2}{10} \\ \frac{\partial L(F_1,F_2,\mu)}{\partial F_2} &= 2F_2F_1^2 - 20\mu = 0 \Rightarrow \mu = \frac{2F_2F_1^2}{20} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mu = \frac{2F_1F_2^2}{10} = \frac{2F_2F_1^2}{20} \Rightarrow F_1 = 2F_2 \\ \frac{\partial L(F_1,F_2,\mu)}{\partial \mu} = -(10F_1 + 20F_2 - 10.000) = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo $F_1 = 2F_2$ en la función de costes $10F_1 + 20F_2 = 10.000$

$$40F_2 = 10.000 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_2 = 250 \\ F_1 = 500 \end{cases}$$

Para que el punto (500, 250) sea un máximo, se deberá verificar la condición **suficiente** de máximo, $d^2L(500, 250, \mu) < 0$

$$\left.\begin{cases} d^2L(F_1,F_2,\mu) = 2F_2^2dF_1^2 + 2 \cdot 4F_1F_2dF_1dF_2 + 2F_1^2dF_2^2 \\ 10dF_1 + 20dF_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad dF_2 = -\frac{1}{2}dF_1 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$d^2L(F_1,F_2,\mu) = 2F_2^2dF_1^2 + 8F_1F_2dF_1\underbrace{\left(-\frac{1}{2}dF_1\right)}_{dF_2} + 2F_1^2\underbrace{\left(-\frac{1}{2}dF_1\right)^2}_{dF_2} = \left(2F_2^2 - 4F_1F_2 + \frac{F_1^2}{2}\right)dF_1^2$$

$$d^2L(500, 250, \mu) = \left(2 \cdot 250^2 - 4 \cdot 500 \cdot 250 + \frac{500^2}{2}\right)dF_1^2 = -25 \cdot 10^4 dF_1^2 < 0$$

Se verifica, y por tanto se trata de un máximo.

Finalmente, sustituyendo en la función de producción, la máxima cantidad de producto, $x = x(F_1, F_2) = F_1^2 \cdot F_2^2$, que se puede obtener con el coste de 10.000 unidades monetarias es: $x = F_1^2 \cdot F_2^2 = 500^2 \cdot 250^2 = 15.625 \cdot 10^6$ unidades.

2.3. Dada la función de costes totales a corto plazo de una empresa:

$$C_T(x) = x^3 - 12x^2 + 48x + 98$$

1.º Determine el volumen de producción en el mínimo de explotación (óptimo técnico).
2.º Determine el volumen de producción en el óptimo de explotación (máximo técnico).
3.º Determine el intervalo en el que los costes marginales son crecientes.
4.º Compruebe que en el mínimo de explotación la función de costes totales tiene una recta tangente que pasa por el punto (0, 98), cuya pendiente es igual al coste variable medio.
5.º Compruebe que en el óptimo de explotación la función de costes totales tiene una recta tangente que pasa por el punto (0, 0), cuya pendiente es igual al coste total medio.

Solución

1.º En el mínimo de explotación se verifica la igualdad $CMg = C_V Me$

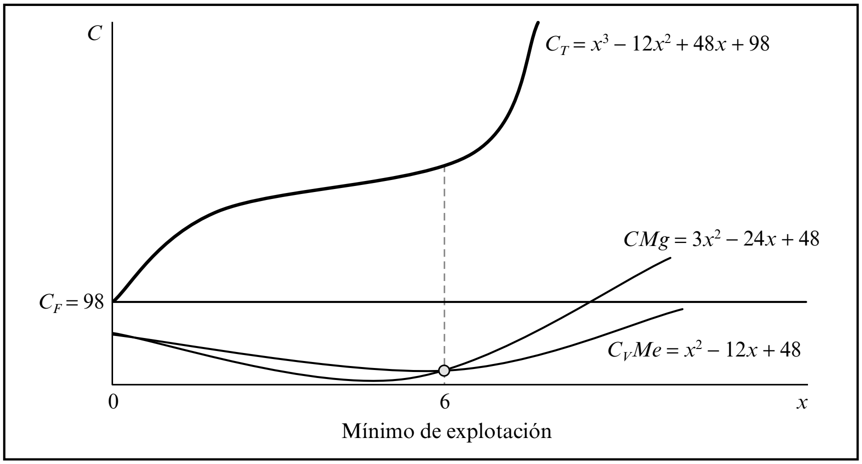
$$\underbrace{3x^2 - 24x + 48}_{CMg} = \frac{x^3 - 12x^2 + 48x}{x} = \underbrace{x^2 - 12x + 48}_{C_V Me} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 0 \text{ (solución despreciada)} \end{cases}$$

También se puede obtener calculando el mínimo de $C_V Me = x^2 - 12x + 48$

Condición necesaria $\dfrac{dC_V Me}{dx} = 2x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6$

Condición suficiente $\dfrac{d^2 C_V Me}{dx^2} = 2 > 0$. Es un mínimo.

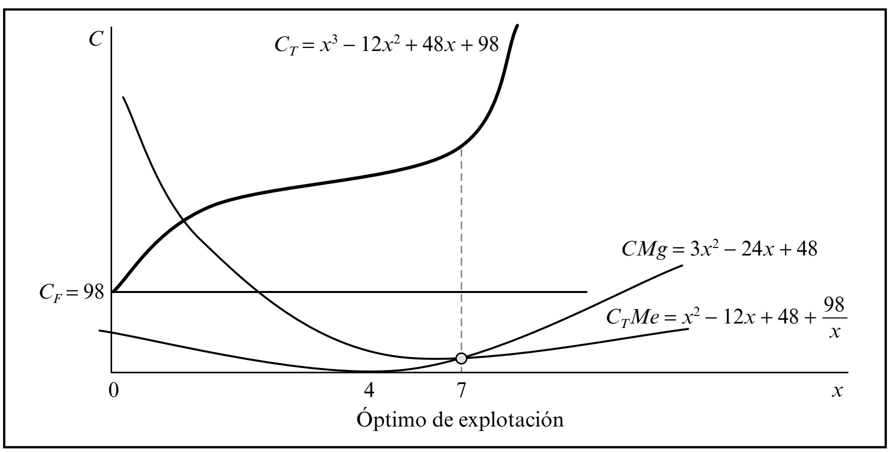
Así pues, la empresa produce en el mínimo de explotación para un volumen de producción de 6 unidades de producto.



2.º En el óptimo de explotación se verifica la igualdad $CMg = C_TMe$

$$\underbrace{3x^2 - 24x + 48}_{CMg} = \underbrace{\frac{x^3 - 12x^2 + 48x + 98}{x}}_{C_TMe} = \underbrace{x^2 - 12x + 48 + \frac{98}{x}}_{C_TMe} \quad \Rightarrow \quad x = 7$$

La empresa produce en el óptimo de explotación un volumen de producción de 7 unidades de producto.



3.º El punto a partir del cual comienzan los costes marginales a ser crecientes es aquel en el que los costes marginales son nulos, $CMg = C' = \frac{dC_T}{dx} = 0$, o los costes totales tienen un punto de inflexión $C'' = \dfrac{d^2C_T}{dx^2} = 0$. La función de costes en la región de costes marginales crecientes verificará $C'' > 0$.

$$CMg = C' = \underbrace{3x^2 - 24x + 48}_{CMg} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \text{ y } C'' = 6x - 24 > 0 \quad \forall \quad x > 4$$

Los costes marginales son crecientes en el intervalo $(4, +\infty)$

4.º La recta tangente a la curva de costes totales en $x = 6$ (óptimo técnico o mínimo de explotación) es la aproximación lineal en dicho punto.

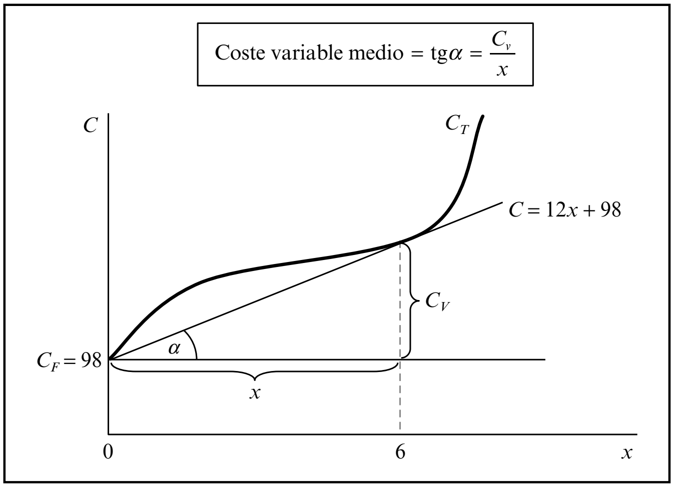
Utilizando el desarrollo de Taylor en $x = 6$ obtenemos la recta tangente a la curva de costes totales en $x = 6$

$$C = C_T(6) + C'(6)(x - 6) = 170 + 12(x - 6) \quad \Rightarrow \quad C = 12x + 98$$

Por lo que la recta buscada es $C = 12x - 98$, que pasa por el punto (0, 98).

La pendiente la recta es igual 12 y el coste variable medio, $C_VMe = x^2 - 12x + 48$, en $x = 6$ es $C_VMe(6) = 6^2 - 12 \cdot 6 + 48 = 12$.

En el mínimo de explotación, $x = 6$, el coste variable medio es igual a la pendiente de la recta $C = 12x - 98$, que es tangente a la función de costes totales y que pasa por el punto (0, 98) o (0, C_F).



5.º La recta tangente a la curva de costes totales en $x = 7$ (óptimo de explotación) es la aproximación lineal en dicho punto.

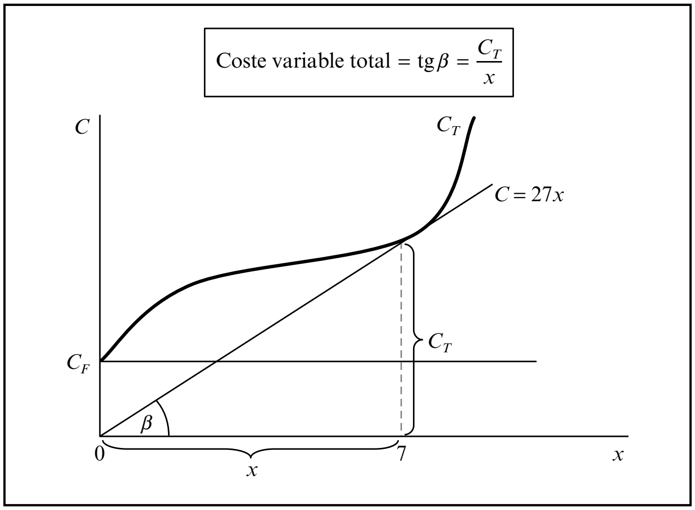
Utilizando el desarrollo de Taylor en $x = 7$ obtenemos la recta tangente a la curva de costes totales en $x = 7$:

$$C = C(7) + C'(7)(x - 7) = 189 + 27(x - 7) \quad \Rightarrow \quad C = 27x$$

La recta buscada es $C = 27x$, que pasa por el punto (0, 0).
La pendiente de la recta es igual 27 y el coste total medio es también igual a 27:

$$C_T Me = x^2 - 12x + 48 + \frac{98}{x}, \text{ en } x = 7 \text{ es } C_T Me(7) = 7^2 - 12 \cdot 7 + 48 + \frac{98}{7} = 27.$$

En el óptimo de explotación, $x = 7$, el coste total medio es igual a la pendiente de la recta $C = 27x$, que es tangente a la función de costes totales y que pasa por el punto (0, 0).



2.4. Dada la función de producción de una empresa $x = x(L, K) = 20K + \frac{50K^2}{L} - \frac{K^3}{L^2}$, en la cual L es el factor capital y K el factor trabajo:

1.º Diga cómo son los rendimientos de escala.
2.º ¿Cuál será la producción si se incrementan los factores productivos, L y K, en un 30%?
3.º Sin determinar la función de costes a largo plazo, diga cómo son los costes totales, medios y marginales a largo plazo.

Solución

1.º $$f(aL, aK) = aK + \frac{50(aK)^2}{aL} - \frac{(aK)^3}{(aL)^2} = a\left(K + \frac{50K^2}{L} - \frac{K^3}{L^2}\right) = af(L, K)$$

La función de producción es homogénea de grado 1, por lo que los rendimientos de escala son constantes. La producción varía en la misma proporción que los factores productivos.

2.º Incrementar los factores productivos, L y K, en un 30% supone multiplicar L y K por 1,3 $\left(L + \frac{30}{100}L = 1{,}3L \quad \text{y} \quad K + \frac{30}{100}K = 1{,}3K\right)$, por lo que $a = 1{,}3$.

$$f(1{,}3 \cdot L,\ 1{,}3 \cdot K) = 1{,}3 \cdot f(L, K)$$

La producción se multiplicará por 1,3. Los rendimientos de escala son constantes, y la producción aumenta en la misma proporción que lo hacen los factores productivos, en un 30%.

3.º Como la función de producción es homogénea de grado 1, los rendimientos de escala son constantes. Los costes aumentarán en la misma proporción que la cantidad producida, por lo que la función de costes totales es lineal partiendo del origen de coordenadas.

Los costes medios y marginales son iguales a una constante que es la pendiente de la función de costes totales.

2.5. Dada la función de producción de una empresa $x = x(K,L) = 10 \cdot L^{\frac{1}{4}}K$, en la cual L es el factor capital y K el factor trabajo:

1.º Calcule la función de costes totales a largo plazo si el precio unitario de los factores L y K son, respectivamente, $w = 2$ y $r = 4$. ¿Cómo serán los costes totales a largo plazo?

2.º Obtenga las funciones de costes marginales. ¿Cómo serán los costes marginales a largo plazo?

3.º Obtenga las funciones de costes medios. ¿Cómo serán los costes medios a largo plazo?

Solución

1.º Los costes a largo plazo vendrán dados por una función, $C_{LP} = wL + rK$, la cual recoge el conjunto de puntos de mínimo coste necesario para obtener cada cantidad de producto, dada la función de producción $x = 10 \cdot L^{\frac{1}{4}}K$:

$C_{LP} = wL + rK \quad \Rightarrow \quad C_{LP} = 2L + 4K$ (en el largo plazo los factores L y K son variables).

Es un problema de optimización condicionada $\begin{cases} \underset{K,L}{\text{Mínimo}} \quad C_{LP} = 2L + 4K \\ s.a. \quad \bar{x} = 10 \cdot L^{\frac{1}{4}}K \end{cases}$

Formemos la ecuación de Lagrange: $\ell(L,K,\lambda) = 2L + 4K - \lambda\left(10 \cdot L^{\frac{1}{4}}K - x\right)$

Condiciones necesarias de extremo relativo:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \ell}{\partial L} = 2 - \dfrac{10\lambda L^{-\frac{3}{4}}K}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{8}{10L^{-\frac{3}{4}}K} \\ \dfrac{\partial \ell}{\partial K} = 4 - 10\lambda L^{\frac{1}{4}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{4}{10L^{\frac{1}{4}}} \\ \dfrac{\partial \ell}{\partial \lambda} = -\left(10 \cdot L^{\frac{1}{4}}K - x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 10 \cdot L^{\frac{1}{4}}K \end{array}\right. \quad \Rightarrow \dfrac{8}{10L^{-\frac{3}{4}}K} = \dfrac{4}{10L^{\frac{1}{4}}} \Rightarrow L = \dfrac{K}{2}$$

Resolviendo el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} L = \dfrac{K}{2} \\ 10L^{\frac{1}{4}} \cdot K = x \end{array}\right. \Rightarrow \quad 10\left(\dfrac{K}{2}\right)^{\frac{1}{4}} K = x \quad \Rightarrow \quad K^{\frac{5}{4}} = \dfrac{2^{\frac{1}{4}}x}{10} \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} K^d = 2^{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{x}{10}\right)^{\frac{4}{5}} \\ L^d = 2^{-\frac{4}{5}}\left(\dfrac{x}{10}\right)^{\frac{4}{5}} = \left(\dfrac{x}{20}\right)^{\frac{4}{5}} \end{array}\right.$$

$K^d = 2^{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{x}{10}\right)^{\frac{4}{5}}$ y $L^d = \left(\dfrac{x}{20}\right)^{\frac{4}{5}}$ son las funciones de demanda de los factores productivos L y K, respectivamente, si se cumple la condición suficiente de mínimo relativo $d^2L(L, K, \lambda) > 0$.

$$\left\{\begin{array}{l} d^2L(L,K,\lambda) = \dfrac{30}{16}\lambda L^{-\frac{7}{4}}KdL^2 - \dfrac{20}{4}\lambda L^{-\frac{3}{4}}dLdK \\ 10 \cdot L^{\frac{1}{4}}K = x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{10}{4} \cdot L^{-\frac{3}{4}}KdL + 10 \cdot L^{\frac{1}{4}}dK = 0 \quad \Rightarrow \quad dK = -\dfrac{K}{4L}dL \end{array}\right.$$

$$d^2L(L,K,\lambda) = \frac{30}{16}\lambda L^{-\frac{7}{4}}KdL^2 - \frac{20}{4}\lambda L^{-\frac{3}{4}}dL\left(-\frac{K}{4L}dL\right) = \frac{50}{16}\lambda KL^{-\frac{7}{4}}d^2L > 0 \quad \forall \left\{\begin{array}{l} L > 0 \\ K > 0 \\ \lambda > 0 \end{array}\right.$$

Sustituyendo ahora $L^d = 2^{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{x}{10}\right)^{\frac{4}{5}}$ y $K^d = \left(\dfrac{x}{20}\right)^{\frac{4}{5}}$ en la función de costes $C_{LP} = 2L + 4K = K + 4K = 5K$, obtendremos la función de costes a largo plazo de la empresa:

$$C_{LP} = 5 \cdot 2^{\frac{1}{5}}\left(\frac{x}{10}\right)^{\frac{4}{5}}$$

Los costes totales a largo plazo son crecientes: ya que,

$$\frac{dC_{LP}}{dx} = CMg_{LP} = \frac{4 \cdot 2^{\frac{1}{5}}}{10}\left(\frac{x}{10}\right)^{-\frac{1}{5}} = \frac{4 \cdot 2^{\frac{1}{5}}}{10}\left(\frac{10}{x}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\left(\frac{10 \cdot 2}{x}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\left(\frac{20}{x}\right)^{\frac{1}{5}} > 0 \;\forall x > 0$$

pero crecen proporcionalmente menos que la producción, ya que la función de producción, $x = 10 \cdot L^{\frac{1}{4}}K$, al ser homogénea de grado mayor que la unidad $(1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} > 1)$ presenta rendimientos crecientes a escala.

2.º La función de coste marginal a largo plazo es $CMg_{LP} = \frac{1}{5}\left(\frac{20}{x}\right)^{\frac{1}{5}}$

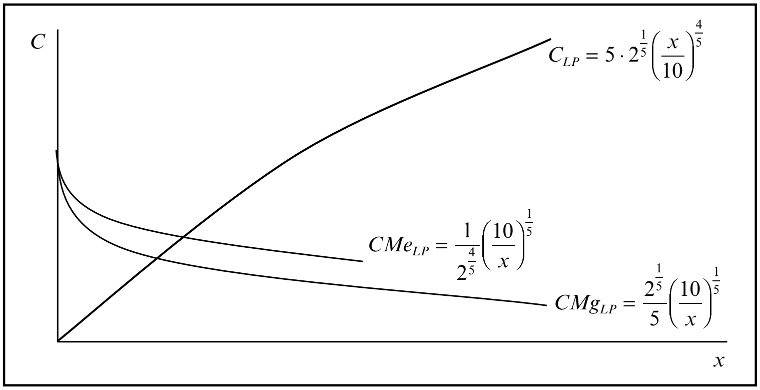
El coste marginal a largo plazo, C'_{LP}, es decreciente para todo x positivo, ya que $\frac{dC'_{LP}}{dx} < 0 \quad \forall x$

3.º La función de coste medios a largo plazo es:

$$CMe_{LP} = \frac{5 \cdot 2^{\frac{1}{5}}\left(\frac{x}{10}\right)^{\frac{4}{5}}}{x} = \frac{5 \cdot 2^{\frac{1}{5}}}{10^{\frac{4}{5}} x^{\frac{1}{5}}} = \frac{5^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}}{2^{\frac{4}{5}} x^{\frac{1}{5}}} = \frac{10^{\frac{1}{5}}}{2^{\frac{4}{5}} x^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{2^{\frac{4}{5}}}\left(\frac{10}{x}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Es siempre decreciente $\left(\frac{dCMe_{LP}}{dx} < 0 \quad \forall x > 0\right)$ y se encuentra por encima de la función de costes marginales:

$$CMe_{LP} = \frac{1}{\underbrace{2^{\frac{4}{5}}}_{0,57}}\left(\frac{10}{x}\right)^{\frac{1}{5}} > CMg_{LP} = \frac{1}{5}\left(\frac{20}{x}\right)^{\frac{1}{5}} = \underbrace{\frac{2^{\frac{1}{5}}}{5}}_{0,37}\left(\frac{10}{x}\right)^{\frac{1}{5}}$$



2.6. Conocida la función de costes totales a corto plazo de una empresa:

$$C_T(x) = x^3 - 12x^2 + 48x + 256.$$

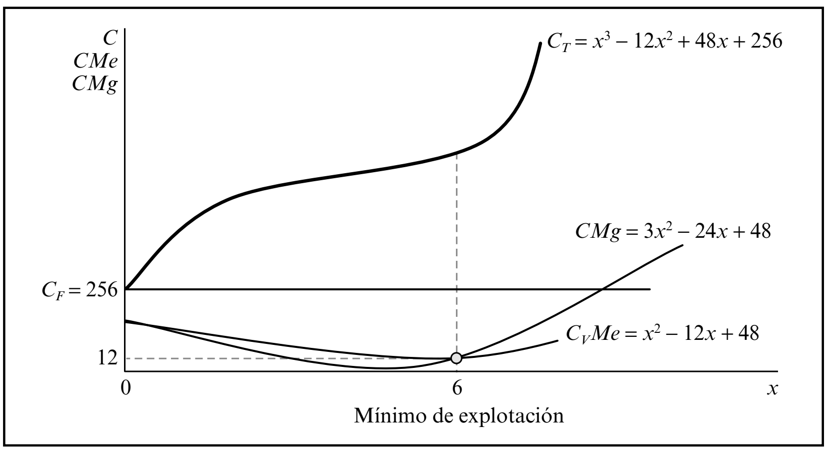
1.º Determine el volumen de producción en el mínimo de explotación.
2.º Determine el volumen de producción en el óptimo de explotación.
3.º Compruebe que en el mínimo de explotación la función de costes totales tiene una recta tangente que pasa por el punto (0, 256) y cuya pendiente es igual al coste variable medio.
4.º Compruebe que en el óptimo de explotación la función de costes totales tiene una recta tangente que pasa por el punto (0, 0) y cuya pendiente es igual al coste total medio.

Solución

1.º El mínimo de explotación verifica que $CMg = C_VMe$:

$$\underbrace{3x^2 - 24x + 48}_{CMg} = \underbrace{\frac{x^3 - 12x^2 + 48x}{x}}_{C_VMe} = \underbrace{x^2 - 12x + 48}_{C_VMe} \quad \Rightarrow \quad x = 6 \text{ es el volumen}$$

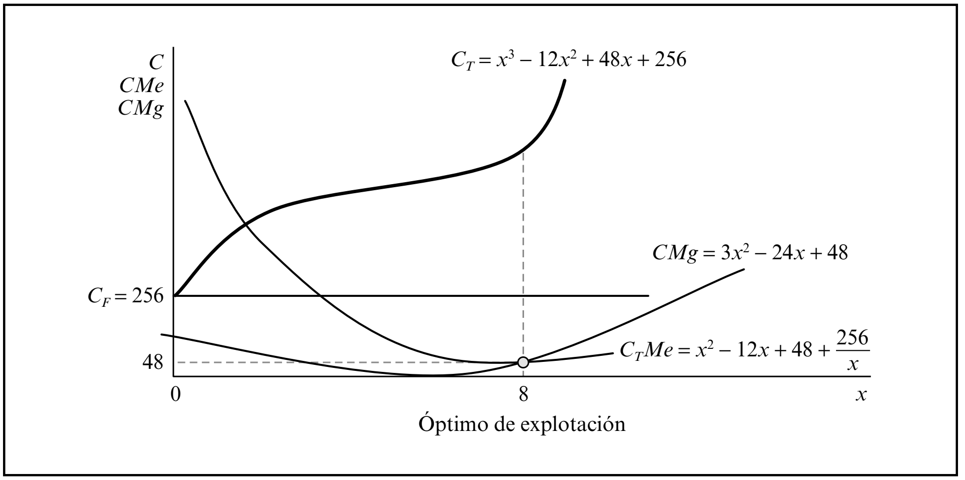
de producción para el cual la empresa produce con los menores costes medios variables.



2.º El óptimo de explotación ha de cumplir $CMg = C_TMe$

$$\underbrace{3x^2 - 24x + 48}_{CMg} = \underbrace{\frac{x^3 - 12x^2 + 48x + 256}{x}}_{C_TMe} = \underbrace{x^2 - 12x + 48 + \frac{256}{x}}_{C_TMe} \quad \Rightarrow \quad x = 8$$

es el volumen de producción para el cual la empresa produce con los menores costes medios totales.



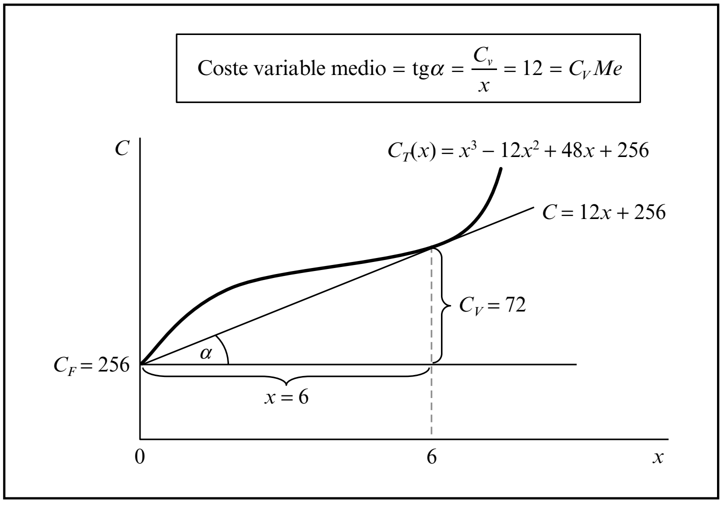
3.º La recta tangente a la curva de costes totales en $x = 6$ (mínimo de explotación) es la aproximación lineal en dicho punto.

Utilizando el desarrollo de Taylor en $x = 6$ obtenemos la recta tangente a la curva de costes totales en $x = 6$:

$$C = C_T(6) + C'(6)(x - 6) = 328 + 12(x - 6) \quad \Rightarrow \quad C = 12x + 256$$

La recta buscada es $C_T(x) = 12x + 256$, que pasa por el punto (0, 256).

La pendiente de la recta $C_T(x) = 12x + 256$ es igual a 12 y el coste variable medio, $C_VMe = x^2 - 12x + 48$, en $x = 6$ es $C_VMe(6) = 6^2 - 12 \cdot 6 + 48 = 12$.



4.º La recta tangente a la curva de costes totales en $x = 8$ (óptimo de explotación) es la aproximación lineal en dicho punto.

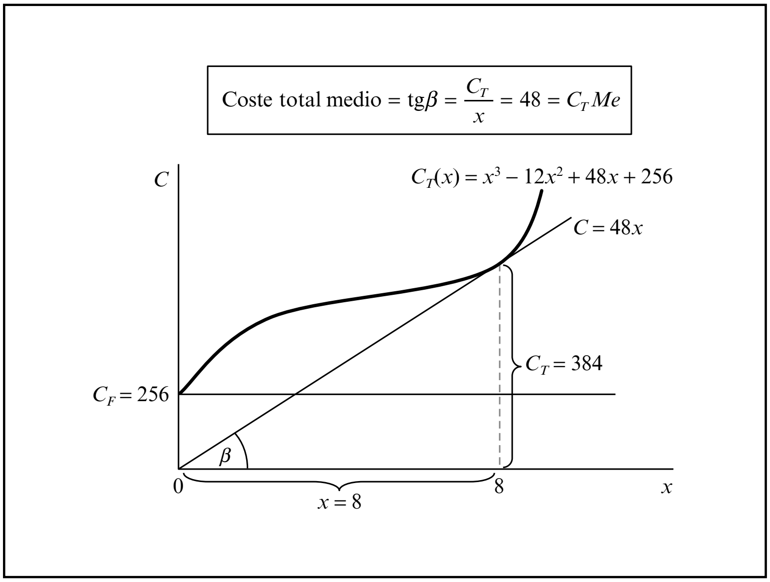
Utilizando el desarrollo de Taylor en $x = 8$ obtenemos la recta tangente a la curva de costes totales en $x = 8$:

$$C = C_T(8) + C'(8)(x - 8) = 384 + 48(x - 8) \qquad C = 48x$$

La recta buscada es $C_T(x) = 48x$, que pasa por el punto (0, 0).

La pendiente la recta es igual a 48, y si calculamos el coste total medio, $C_T Me = x^2 - 12x + 48 + \dfrac{256}{x}$, en $x = 8$, obtenemos:

$$C_T Me(8) = 8^2 - 12 \cdot 8 + 48 + \frac{256}{8} = 48.$$



2.7. Dada la función de costes marginales de una empresa $CMg(x) = 6x^2 - 8x + 10$:

1.º Determine la función de costes variables, $C_V(x)$.
2.º Determine el coste variable de producir 10 unidades de producto.
3.º Determine los costes fijos si el coste total de producir 5 unidades es igual a 1.500 u.m.
4.º Determine la función de costes totales, $C_T(x)$.

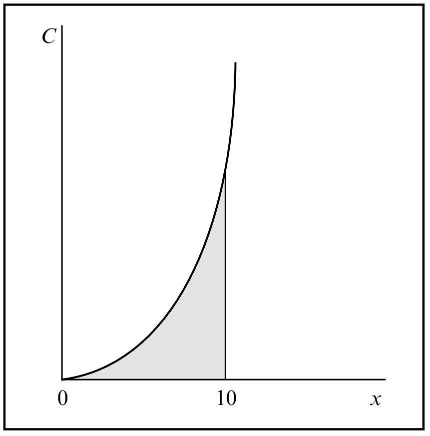
Solución

1.º La integral indefinida del coste marginal es la función de costes variables de la empresa.

$$C_V(x) = \int CMg(x)\,dx = \int (6x^2 - 8x + 10)dx = 2x^3 - 4x^2 + 10x$$

2.º El área de la superficie comprendida entre la función de coste marginal, los ejes coordenados y la recta $x = 10$ es el coste variable de la empresa al producir 10 unidades de producto. Es decir, la integral definida de la función coste marginal entre $x = 0$ y $x = 10$.

$$C_V(10) = \int_0^{10} (6x^2 - 8x + 10)\,dx = \left[2x^3 - 4x^2 + 10x\right]_0^{10} = 1.700$$



3.º Conocido el coste variable, la función del coste total es la suma del coste fijo más el coste variable (en el corto plazo):

$$C_T(x) = \underbrace{2x^3 - 4x^2 + 10x}_{C_V(x)} + C_F$$

$$C_T(5) = \underbrace{2 \cdot 5^3 - 4 \cdot 5^2 + 10 \cdot 5}_{C_V(x)} + C_F = 200 + C_F = 1.500 \quad \Rightarrow \quad C_F = 1.300$$

4.º La función de costes totales de la empresa es:

$$C_T(x) = \underbrace{2x^3 - 4x^2 + 10x}_{C_V(x)} + \underbrace{1.300}_{C_F}$$