PROBLEMAS RESUELTOS

1.1. Sabiendo que la función de producción de una empresa viene dada por

$$x = x(K, L) = L^2(8K + 4) - 4L^3$$

en la cual K representa al factor capital y L al factor trabajo, y suponiendo que el factor K es fijo e igual a 10:

1.º ¿Cuántas unidades del factor L son necesarias para obtener la producción máxima? ¿Cuál es la producción máxima?
2.º ¿Cuántas unidades del factor L son necesarias para hacer máxima la productividad media por trabajador? Obtener el valor del producto medio y el producto marginal para ese valor de L.
3.º ¿A partir de qué cantidad de factor K la productividad marginal del factor L se hace decreciente? ¿Cuál es el valor de la productividad marginal para ese nivel de L?

Solución

1.º Obtenemos la función de producción a corto plazo $x = L^2(8 \cdot 10 + 4) - 4L^3 = 84L^2 - 4L^3$ (sustituyendo en $x = L^2(8K + 4) - 4L^3$ el factor fijo $K = 10$).

Determinar la producción máxima (máximo técnico) es un problema de optimización, en el que hay que calcular la cantidad de factor L que permite maximizar la producción de X (siendo el factor fijo $K = 10$):

$$\underset{L}{\text{Máximo}} \quad PT_L = x = 84L^2 - 4L^3$$

Condición necesaria de máximo $\dfrac{dPT_L}{dL} = 0$:

$$\frac{dPT_L}{dL} = 168L - 12L^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad L = 14$$

Condición suficiente de máximo $\dfrac{d^2PT_L}{dL^2} < 0$:

$$\frac{d^2PT_L}{dL^2} = 168 - 24L^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2PT_L}{dL^2}(14) = 168 - 24 \cdot 14^2 < 0$$

lo que garantiza que en el punto $L = 14$ existe un máximo.

El valor de la producción máxima es $PT_{\text{Máxima}} = 84 \cdot 14^2 - 4 \cdot 14^3 = 5.488$ unidades de producto, la cual se obtiene cuando se utilizan $L = 14$ unidades de factor trabajo, siendo el factor fijo $K = 10$.

2.º Para resolver este apartado hemos de calcular el valor de L que hace máxima la productividad media, es decir el óptimo técnico, el cual se puede obtener calculando el máximo PMe_L, o bien el punto en el que coinciden la productividad media y la productividad marginal: $PMe_L = PMg$.

La productividad media del factor L (siendo el factor fijo $K = 10$) es:

$$PMe_L = \frac{x}{L} = 84L - 4L^2$$

Calculemos el máximo de la función $PMe_L = 84L - 4L^2$.

Condición necesaria de máximo: $\dfrac{dPMe_L}{dL} = 84 - 8L = 0 \quad \Rightarrow \quad L = 10{,}5$ unidades de factor trabajo.

Condición suficiente de máximo: $\dfrac{d^2PT}{dL^2} = -8 < 0$, lo que garantiza que es un máximo.

El valor de la productividad media de L para $L = 10{,}5$ es:

$$PMe_L = 84 \cdot 10{,}5 - 4 \cdot 10{,}5^2 = 441$$

La productividad marginal de L es:

$$PMg_L = \frac{dx}{dL} = 168L - 12L^2$$

Sustituyendo $L = 10{,}5$:

$$PMg_L = 168 \cdot 10{,}5 - 12 \cdot 10{,}5^2 = 441$$

Se comprueba que en el óptimo técnico (o máxima productividad media) se igualan la productividad media y la productividad marginal.

3.º Para determinar a partir de qué valor de L la productividad marginal decrece, calculamos el valor de L para el que la productividad marginal se hace máxima:

$$\underset{L}{\text{Máxima}} \quad PMg_L = 168L - 12L^2$$

Condición necesaria de máximo: $\dfrac{dPMg_L}{dL} = 168 - 24L = 0 \quad \Rightarrow \quad L = 7$ unidades de factor trabajo.

Condición suficiente de máximo: $\dfrac{d^2PMg_L}{dL^2} = 24 < 0$, lo que garantiza que en $L = 7$ existe un máximo.

Sustituyendo ahora $L = 7$ en la expresión de la productividad marginal, $PMg_L = 168L - 12L^2$, se obtiene su valor máximo:

$PMg_{\text{máxima}} = 168 \cdot 7 - 12 \cdot 7^2 = 588$ unidades de producto y $\forall x \in (7, 14)$, de modo que la productividad marginal es decreciente.

1.2. Sabiendo que la función de producción de una empresa es $x = x(K, L) = K \cdot L$, donde L representa el factor trabajo y K el factor capital:

1.º Represente gráficamente las funciones isocuantas.

2.º Calcule e interprete $\dfrac{\partial x}{\partial K}$ y $\dfrac{\partial^2 x}{\partial K^2}$.

Solución

1.º Las funciones isocuantas son las curvas de nivel de la función de producción $x = L \cdot K$ en el primer cuadrante. Para cada valor de x existe una función isocuanta.

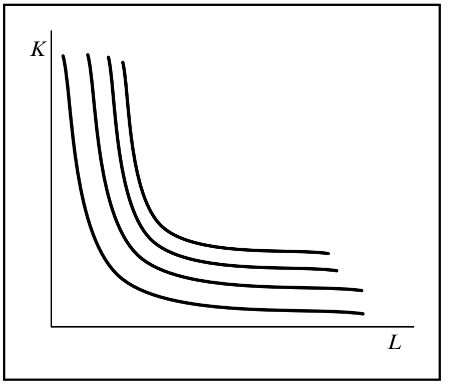
Consideremos que $x = c > 0$, sustituimos en la función de producción: $c = L \cdot K$, y despejamos K: $K = \dfrac{c}{L}$.

— No hay puntos de corte con los ejes.

— $\dfrac{\partial K}{\partial L} = \dfrac{-c}{L^2} < 0 \qquad \forall\, c > 0$ y $\forall L > 0 \quad \Rightarrow \quad \downarrow$. Es decreciente. No existen máximos ni mínimos relativos.

— $\dfrac{\partial^2 K}{\partial L^2} = \dfrac{2c}{L^3} > 0 \qquad \forall\, c > 0$ y $\forall L > 0 \quad \Rightarrow \cup$. No existen puntos de inflexión y es convexa respecto al origen.

— Su representación gráfica es:



2.º $\dfrac{\partial x}{\partial K} = L > 0$ y $\dfrac{\partial^2 x}{\partial K^2} = 0$

Puesto que $\dfrac{\partial x}{\partial K} = L > 0$, al aumentar el factor K la cantidad de producto crece, y por ser $\dfrac{\partial^2 x}{\partial K^2} = 0$, x aumenta a una tasa constante.

1.3. Dadas las siguientes funciones de producción:

1.º $x = x(K, L) = 6K + 8L$
2.º $x = x(K, L) = K^5 L^{10}$
3.º $x = x(K, L) = (2K^\alpha + 4L^\alpha)^\beta$

donde K es el factor capital y L el factor trabajo, obtenga la $RMST_{K,L\bar{x}}$.

Solución

1.º $$RMST_{K,L\bar{x}} = -\frac{\dfrac{\partial x}{\partial L}}{\dfrac{\partial x}{\partial K}} = -\frac{PMg_L}{PMg_K} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

2.º $$RMST_{K,L\bar{x}} = -\frac{PMg_L}{PMg_K} = -\frac{10K^5L^9}{5K^4L^{10}} = -\frac{2K}{L}$$

3.º $$RMST_{K,L\bar{x}} = -\frac{PMg_L}{PMg_K} = -\frac{4\alpha\beta L^{\alpha-1}(2K^\alpha + 4L^\alpha)^{\beta-1}}{2\alpha\beta K^{\alpha-1}(2K^\alpha + 4L^\alpha)^{\beta-1}} = -2\left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha-1}$$

1.4. Conocida la función de producción de una empresa:

$$x = x(L, K) = 10L^{3,5}K^{2,5}$$

donde K es el factor capital y L el factor trabajo:

1.º Indique cómo son los rendimientos de escala de la función de producción.
2.º ¿Cómo variará la producción si se multiplican por 3 los factores productivos?
3.º Calcular las productividades marginales si $L = 1$ y $K = 1$.
4.º Compruebe, si $L = 1$ y $K = 1$, que la suma de las productividades marginales de L y K multiplicadas por las respectivas cantidades utilizadas de L y K es igual a la producción multiplicada por el grado de homogeneidad (Teorema de Euler).

Solución

1.º $f(aL, aK) = 10^{3,5}(aK)^{2,5} = a^6 \cdot \underbrace{10L^{3,5}K^{2,5}}_{x} = a^6 x$

Los rendimientos de escala son crecientes, ya que la función de producción es homogénea de grado 6 > 1. La producción varía en el mismo sentido que los factores productivos y proporcionalmente más que ellos.

2.º Si se multiplican por 3 los factores productivos la producción se multiplica por 3^6.

$$x = f(3L, 3K) = 10(3L)^{3,5}(3K)^{2,5} = 3^6 x$$

3.º Las productividades marginales si $L = 1$ y $K = 1$ son:

$$\frac{\partial x}{\partial L} = 35L^{2,5}K^{2,5} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x}{\partial L}(1,1) = 35$$

$$\frac{\partial x}{\partial K} = 25L^{3,5}K^{1,5} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x}{\partial K}(1,1) = 25$$

4.º Teorema de Euler: $L \cdot \dfrac{\partial x}{\partial L} + K \cdot \dfrac{\partial x}{\partial K} = n \cdot x$ ***(A)***

Sabemos que $n = 6$, y si $L = 1$ y $K = 1 \quad \Rightarrow \quad x(1,1) = 10$ y $\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial L}(1,1) = 35 \\ \dfrac{\partial x}{\partial K}(1,1) = 25 \end{cases}$

Sustituyendo en (A): $1 \cdot 35 + 1 \cdot 25 = 6 \cdot 10 = 60$

1.5. Dada la función de producción a corto plazo de una empresa

$$x = x(K, L) = 100 + \frac{50}{L} - \frac{25}{L^2}$$

donde K es el factor capital y L el factor trabajo, determine:

1.° El máximo técnico y la cantidad de producto obtenida en el máximo técnico.
2.° La cantidad de producto para la cual la producción media es igual a la productividad marginal (óptimo técnico).

Solución

1.º El máximo técnico es el máximo de la función $x = 100 + \frac{50}{L} - \frac{25}{L^2}$.

Condición necesaria de máximo $\frac{dx}{dL} = 0$: $\frac{dx}{dL} = -\frac{50}{L^2} + \frac{50}{L^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad L = 1$ unidades de factor.

Condición suficiente de máximo: $\frac{d^2x}{dL^2} < 0$

$$\frac{d^2x}{dL^2} = \frac{100L - 150}{L^4} \quad \text{y} \quad \forall L = 1 \qquad \frac{d^2x}{dL^2}(1) = \frac{100 \cdot 1 - 150}{1^4} = -50 < 0$$

La cantidad máxima de producto obtenida en el máximo técnico es:

$$x = 100 + \frac{50}{1} - \frac{25}{1^2} = 125 \text{ unidades de producto.}$$

El máximo técnico se encuentra, por tanto, en el punto (1, 125), es decir, utilizando 1 unidad del factor trabajo se obtienen 125 unidades de producto.

2.º **Producción media:** $PMe_L = x_L^* = \frac{x}{L} = \frac{100}{L} + \frac{50}{L^2} - \frac{25}{L^3}$

Producción marginal: $PMg_L = x'_L = \frac{dx}{dL} = -\frac{50}{L^2} + \frac{50}{L^3}$

Resolviendo la ecuación $\underbrace{\frac{100}{L} + \frac{50}{L^2} - \frac{25}{L^3}}_{\frac{x}{L}} = \underbrace{-\frac{50}{L^2} + \frac{50}{L^3}}_{\frac{dx}{dL}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} L = \frac{1}{2} \\ L = -\frac{3}{2} \end{cases}$

($L = -\frac{3}{2}$, solución despreciada por ser negativa).

La producción media es igual a la productividad marginal cuando $L = \frac{1}{2}$ unidades de factor.

En el óptimo técnico se utilizan $L = \frac{1}{2}$ unidades de factor y 100 unidades de producto, ya que sustituyendo $L = \frac{1}{2}$ en la función de producción, $x = 100 + \frac{50}{L} - \frac{25}{L^2}$, obtenemos $x = 100 + \frac{50}{\frac{1}{2}} - \frac{25}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 100$.

1.6. Supuesta la función de producción de una empresa

$$x = x(L, K) = 20L + \frac{K^2}{L} - \frac{K^3}{L^2}$$

donde K es el factor capital y L el factor trabajo, determine:

1.º Los rendimientos de escala de la función de producción.
2.º ¿Cuál será la producción si se incrementan los factores productivos en un 20 %?

Solución

1.º $$x(aL, aK) = 20(aL) + \frac{(aK)^2}{aL} - \frac{(aK)^3}{(aL)^2} = a\left(20L + \frac{10K^2}{L} - \frac{K^3}{L^2}\right) = ax(L, K) = ax$$

La función de producción es homogénea de grado 1, por lo que los rendimientos de escala son constantes. La producción varía en la misma proporción que los factores productivos.

2.º $$x\left(L + \frac{20}{100}L, K + \frac{20}{100}K\right) = x(1{,}2L; 1{,}2 \cdot K) = 1{,}2 \cdot x(L, K) = 1{,}2x.$$

La producción se multiplicará por 1,2. Es decir, dado que los rendimientos de escala son constantes, la producción aumenta en la misma proporción que lo hacen los factores productivos, en un 20 %.

1.7. Dada la función de producción de una empresa

$$x = x(K, L) = 80LK - 4L^2 - K^2$$

donde K es el factor capital y L el factor trabajo:

1.º Determine la máxima cantidad de producto que puede obtenerse si el factor de producción L se mantiene constante en 20 unidades (máximo técnico).
2.º Determine la cantidad de producto para la cual la producción media es máxima (óptimo técnico).

Solución

1.º Si $L = 20 \quad \Rightarrow \quad x = 80 \cdot 20K - 4 \cdot 20^2 - K^2 \quad \Rightarrow \quad x = 1.600K - 1.600 - K^2$

El problema se plantea:

$$\underset{K}{\text{Máximo}} \quad x = 1.600K - 1.600 - K^2$$

Para que x tome el valor máximo deberá verificarse:

Condición necesaria de máximo:

$$\frac{dx}{dK} = 0, \qquad \frac{dx}{dK} = 1.600 - 2K = 0 \quad \Rightarrow \quad K = 800$$

Condición suficiente de máximo:

$$\frac{d^2x}{dK^2} < 0, \qquad \frac{d^2x}{dK^2} = -2 < 0 \qquad \forall\ K$$

Si el factor L se emplea en la cantidad constante de 20 unidades, el factor K se emplea en 800, alcanzando la máxima cantidad de producto $x = 638.400$.

El máximo técnico para $L = 20$ se encuentra el punto (800, 638.400).

2.º La función de producción media es:

$$PMe_K = x_K^* = \frac{x}{K} = \frac{1.600K - 1.600 - K^2}{K} = 1.600 - \frac{1.600}{K} - K$$

y será máxima para el valor no negativo de K que verifique:

$$\begin{cases} \dfrac{dPMe_K}{dK} = 0 & \text{(condición necesaria)} \\ \dfrac{d^2PMe_K}{dK^2} < 0 & \text{(condición suficiente)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dPMe_K}{dK} = \dfrac{1.600}{K^2} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad K = 40 \\ \dfrac{d^2PMe_K}{dK^2} = -\dfrac{3.200}{K^3} < 0 \qquad \forall K > 0 \end{cases}$$

Para calcular la producción si $K = 40$ bastará sustituir el valor de K en la función de producción $x = 1.600K - 1.600 - K^2$,

$$x = 1.600 \cdot 40 - 1.600 - 40^2 \quad \Rightarrow \quad x = 60.800$$

El punto $(400, 60.800)$ es el óptimo técnico.

Otra manera de calcular el óptimo técnico es igualando las funciones de productividad marginal, $PMg_K = \dfrac{dx}{dK} = 1.600 - 2K$, y de productividad media $PMe_K = 1.600 - \dfrac{1.600}{K} - K$.

$1.600 - 2K = 1.600 - \dfrac{1.600}{K} - K \quad \Rightarrow \quad K = 40$ ($K = -40$ se desprecia por ser negativo).

1.8. Dada la función de producción de una empresa $x = x(K, L) = 80LK - 4L^2 - K^2$, donde K es el factor capital y L el factor trabajo, obtener:

1.º La función relación marginal de sustitución técnica de K por L.
2.º La relación de sustitución técnica si $K = 10$ y $L = 20$.
3.º Si aumentase el factor L en una unidad y se mantiene la producción constante (no se cambia de isocuanta), cuando $K = 10$ y $L = 20$, determine la variación de la cantidad empleada del factor K, y relacione este variación con la relación marginal de sustitución técnica de K por L.
4.º Si aumenta L en un 1 % y se mantiene la producción constante cuando $K = 10$ y $L = 20$, determine la variación de la cantidad empleada del factor K. Relacione esta variación con la relación marginal de sustitución técnica de K por L.

Solución

1.º La función relación marginal de sustitución técnica de K por L es:

$$RMT_{K,L_{\bar{x}}} = \frac{dK}{dL} = -\frac{PMg_L}{PMg_K} = -\frac{80K - 8L}{80L - 2K}$$

2.º La relación de sustitución técnica si $K = 10$ y $L = 20$ es:

$$RMT_{K,L_{\bar{x}}} = -\frac{80 \cdot 10 - 8 \cdot 20}{80 \cdot 20 - 2 \cdot 10} = -\frac{32}{79} = -0{,}405$$

3.º Si $K = 10$ y $L = 20 \quad \Rightarrow \quad x = 80 \cdot 20 \cdot 10 - 4 \cdot 20^2 - 10^2 = 14.300$. Si aumenta L en una unidad, $\Delta L = 1$ (pasa de 20 a 21), y si la producción se mantiene constante en $x = 14.300$ (no se cambia de isocuanta), se deberá reducir la cantidad empleada del factor K.

Es decir, se ha de verificar $x = 14.300 = 80 \cdot 21 \cdot K - 4 \cdot 21^2 - K^2 \quad \Rightarrow \quad K = 9{,}617$.

La reducción de K es igual a $\Delta K = 9{,}617 - 10 = -0{,}383$. El valor de la variación de K es aproximadamente igual al valor de la relación de sustitución técnica de K por L, $-\frac{32}{79}$, en el punto considerado ($K = 10$ y $L = 20$), multiplicada por el incremento de L, $\Delta L = 1$, si este incremento es muy pequeño[1].

En efecto, $\Delta K = -\frac{32}{79} \cdot 1 = -0{,}405$.

4.º Si aumenta L en un **1 %,** $\Delta L = 0{,}2$ (pasa de 20 a 20,2), y se mantiene la producción constante en $X = 14.300$ (no se cambia de isocuanta), se deberá reducir la cantidad empleada del factor K.

Es decir, se ha de verificar $x = 14.300 = 80 \cdot 20{,}2 \cdot K - 4 \cdot 20{,}2^2 - K^2 \quad \Rightarrow \quad K = 9{,}92$.

La reducción de K es igual a $\Delta K = 9{,}92 - 10 = -0{,}08$. Esta variación de K es igual (o aproximadamente igual) al valor de la relación de sustitución técnica, $-\frac{32}{79}$, en el punto considerado ($K = 10$ y $L = 20$), multiplicada por el incremento de L, $\Delta L = 0{,}2$, si este incremento es muy pequeño.

---

[1] Cuando el incremento de una variable independiente es muy pequeño, la diferencial de una función, continua y derivable, toma un valor aproximado al incremento de la misma:

$$dK = \underbrace{-\frac{PMg_L}{PMg_K}}_{RMT_{K,L_{\bar{x}}}} \cdot \underbrace{dL}_{\Delta L} \quad \Rightarrow \quad \Delta K \cong -RMT_{K,L_{\bar{x}}} \cdot \Delta L \quad \Rightarrow \quad \Delta K = -\underbrace{\frac{32}{79}}_{RMT_{K,L_{\bar{x}}}} \cdot \underbrace{1}_{\Delta L} = -0{,}405$$

Cuanto más pequeño es el incremento de L, más pequeño será el error cometido al considerar la diferencial de K en lugar del incremento de K.

En efecto, $\Delta K = -\frac{32}{79} \cdot 0{,}2 = -0{,}081.$[2]

1.9. Dada la función de producción de una empresa $x = x(K, L) = LK + L^2 - \frac{L^3}{K}$, donde K es el factor capital y L el factor trabajo, determine la zona en la que al empresario le interesa producir racionalmente si K se mantiene constante en $K = 20$.

Solución

La zona buscada es la que se encuentra entre el punto de inflexión de la función de producción, $x = 20L + L^2 - \frac{L^3}{20}$, y el máximo técnico de la función $x = 20L + L^2 - \frac{L^3}{20}$, diferenciando también la zona en la cual se alcanza el óptimo técnico. Calculemos los puntos de interés.

El máximo técnico es el máximo de la función $x = 20L + L^2 - \frac{L^3}{20}$.

Condición necesaria de máximo $\frac{dx}{dL} = 0$:

$$\frac{dx}{dL} = 20 + 2L - \frac{3L^2}{20} = 0 \quad \forall \begin{cases} L = 20 \\ L = -\frac{20}{3} \end{cases}$$

La solución válida desde el punto de vista económico es $L = 20$ unidades del factor trabajo (no tiene sentido considerar que la cantidad de trabajo sea negativa).

Condición suficiente de máximo $\frac{d^2x}{dL^2} < 0$:

$$\frac{d^2x}{dL^2} = 2 - \frac{3L}{10} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dL^2}(20) = 2 - \frac{60}{10} = -3 < 0$$

[2] El incremento de L en un 2% es más pequeño en este caso que en el apartado anterior, por lo que el valor de la diferencial de K es más próximo al valor del incremento de K.

$$\Delta K \cong -RMT_{K,L_{\bar{x}}} \cdot \Delta L \quad \Rightarrow \quad \Delta K = -\underbrace{\frac{32}{79}}_{RMT_{K,L_{\bar{x}}}} \cdot \underbrace{0{,}2}_{\Delta L} = -0{,}081$$

El máximo técnico se alcanza para $L = 20$ unidades del factor trabajo.

Calculemos el punto de inflexión de la función $x = 20L + L^2 - \frac{L^3}{20}$

$$\frac{d^2x}{dL^2} = 2 - \frac{3L}{10} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3L = 20 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{20}{3}$$

Resultado que coincide con el máximo de la función productividad marginal:

$$\text{Máximo} \quad PMg_L = 20 + 2L - \frac{3L^2}{20}$$

Condición necesaria de máximo: $\frac{dPMg_L}{dL} = 2 - \frac{6L}{20} = 0 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{20}{3}$ unidades de trabajo.

Condición suficiente de máximo: $\frac{dPMg_L^2}{dL} = -\frac{6}{20} < 0 \quad \Rightarrow$ se trata de un máximo.

Finalmente, calculamos el óptimo técnico o punto en el cual se obtiene la máxima productividad media cuando $K = 20$. La función productividad media es:

$$PMe_L = 20 + L - \frac{L^2}{20}$$

$$\text{Máximo} \quad PMe_L = 20 + L - \frac{L^2}{20}$$

Condición necesaria de óptimo: $\frac{dPMe_L}{dL} = 1 - \frac{2L}{20} = 0 \quad \Rightarrow \quad L = 10$ unidades de trabajo.

Condición suficiente de máximo: $\frac{dPMe_L^2}{dL} = -\frac{2}{20} < 0 \quad \Rightarrow$ se trata de un máximo.

En el óptimo técnico coinciden, asimismo, la productividad media y la productividad marginal. Lo comprobamos:

$$PMe_L = PMg_L \;\Rightarrow\; 20 + L - \frac{L^2}{20} = 20 + 2L - \frac{3L^2}{20} \;\Rightarrow\; L = 10 \text{ unidades de trabajo.}$$

Al empresario le interesará producir en la zona comprendida entre la máxima productividad marginal y el óptimo técnico, es decir, para la cantidad de factor trabajo comprendida entre $L = \frac{20}{3}$ y $L = 10$, $L \in \left[\frac{20}{3}, 10\right]$, puesto que aunque la productividad marginal empieza a decrecer, la productividad media es aún creciente. Si el factor trabajo es, además, barato, le interesará producir en la zona comprendida entre el óptimo técnico y el máximo técnico, es decir, la comprendida entre $L = 10$ y $L = 20$, $L \in [10, 20]$.