4. Amplía: factoriales y números combinatorios

FACTORIALES

El número de permutaciones de n elementos es:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

A este producto de n factores decrecientes a partir de n se le designa por $n!$ que se lee "factorial de n" o "n factorial".

Por ejemplo, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

El valor de $n!$ crece enormemente deprisa al aumentar n. Por ejemplo:

$10! = 3\,628\,000$

$20!$ tiene 18 cifras

La fórmula de las variaciones se puede expresar muy cómodamente con factoriales:

$$V_{m,\,n} = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) \overset{(1)}{=}$$

$$= \frac{[m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)] \cdot [(m-n) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1]}{(m-n) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

(1) Hemos multiplicado numerador y denominador por $(m-n)!$ para conseguir en el numerador $m!$.

Por ejemplo: $V_{7,\,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{7!}{4!}$

NÚMEROS COMBINATORIOS

Los números que se obtienen al aplicar la fórmula de las combinaciones, $C_{m,\,n}$, se llaman **números combinatorios** y se suelen designar así: $\binom{m}{n}$. Se lee m *sobre* n.

Por ejemplo: $\binom{7}{3} = C_{7,\,3} = \dfrac{V_{7,\,3}}{P_3} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

Los números combinatorios pueden expresarse, también, con factoriales:

$$\binom{m}{n} = \frac{V_{m,\,n}}{P_n} = \frac{m!\,/\,(m-n)!}{n!} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Por ejemplo: $\binom{7}{3} = \dfrac{V_{7,\,3}}{P_3} = \dfrac{7!\,/\,4!}{P_3} = \dfrac{7!}{3! \cdot 4!}$

Los factoriales son muy cómodos para manejar expresiones teóricas. Pero para cálculos numéricos son preferibles las fórmulas sin ellos.

Propiedades de los números combinatorios

Los números combinatorios tienen interesantes propiedades. Vamos a ver algunas:

I. $\binom{m}{0} = 1, \ \binom{m}{m} = 1$

$\binom{m}{0}$ significa el número de combinaciones *con ningún elemento* que se pueden hacer con m elementos.

Solo el conjunto vacío tiene "ningún elemento". Es decir, solo hay una.

$\binom{m}{m}$ es el número de combinaciones que se pueden hacer con todos los elementos. Es claro que solo hay una.

Por ejemplo: $\binom{7}{0} = 1, \ \binom{7}{7} = 1$

II. $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$ Pues, si disponemos de m elementos, cada vez que escogemos n nos quedan $m - n$.

Es decir, cada vez que formamos una combinación de n elementos, nos queda otra de $m - n$.

Por ejemplo: $\binom{7}{3} = \binom{7}{4}, \ \binom{100}{99} = \binom{100}{1}$

III. $\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \binom{m}{n}$

Por ejemplo: $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}, \ \binom{7}{5} + \binom{7}{6} = \binom{8}{6}, \ \binom{11}{7} + \binom{11}{8} = \binom{12}{8}$

La justificación de esta propiedad es más complicada que la de las anteriores; por eso la demostramos con una historieta.

Empecemos probando que: $\binom{6}{3} + \binom{6}{4} = \binom{7}{4}$

Leticia y Héctor son una pareja de recién casados. Tienen 7 objetos de adorno y una vitrina donde caben 4 de ellos.

El número de posibles elecciones es: $\binom{7}{4}$

Pero en el momento de hacer la elección surge una pequeña diferencia de criterio: Leticia exige que uno de los objetos sea el retrato de su madre, mientras que Héctor rechaza esta posibilidad.

- ¿Cuántas son las posibilidades que admite Leticia? Tantas como formas de seleccionar los 3 objetos que acompañarán al retrato de su madre, es decir: $\binom{6}{3}$
- ¿Cuántas son las posibilidades que admite Héctor? Tantas como formas de seleccionar 4 objetos de entre los 6 que no son el retrato de su suegra, es decir: $\binom{6}{4}$

Pero fíjate que, necesariamente, si seleccionan 4 objetos, uno de los dos se saldrá con la suya. Es decir, que cualquier posible selección o es de las que quiere Leticia, o es de las que quiere Héctor. Por tanto:

$$\binom{6}{3} + \binom{6}{4} = \binom{7}{4}$$

Si en lugar de 7 objetos tuvieran *m*, y en la vitrina en vez de 4 cupiesen *n*, el mismo razonamiento nos llevaría a la demostración de la fórmula.

TRIÁNGULO DE TARTAGLIA

Tartaglia (se lee *Tartalla*) fue un matemático italiano del siglo XVI. Su verdadero nombre era Niccolò Fontana. En una guerra recibió un golpe, a consecuencia del cual quedó tartamudo. Su apodo, Tartaglia (tartaja), se hizo tan popular que él mismo firmaba así sus libros.

Pues bien, para resaltar las propiedades de los números combinatorios, a este matemático se le ocurrió ponerlos del siguiente modo:

$$\begin{array}{c}
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}
\end{array}$$

Sus correspondientes valores son los de la derecha.

Puedes comprobarlo.

$$\begin{array}{c}
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}$$

Esta configuración responde a las propiedades de arriba.

- Todos los elementos de los extremos valen 1 (Propiedad I).
- En cada fila, los elementos simétricos son iguales (Propiedad II).
- Cada elemento, salvo los de los extremos, se obtiene sumando los dos que tiene encima (Propiedad III).

De este modo, cada línea del triángulo de Tartaglia se obtiene de la anterior: se empieza y se termina con 1 y cada uno de los demás términos se halla sumando los dos que tiene encima.

$$\begin{array}{ll}
5.^{a} & \quad 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
6.^{a} & 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
7.^{a} & 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}$$

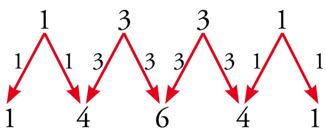
4. Amplía: factoriales y números combinatorios

OTRA PROPIEDAD DEL TRIÁNGULO DE TARTAGLIA

La suma de los elementos de la fila n-ésima es 2^n.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & & & \longrightarrow & 2 = 2^1 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & \longrightarrow & 4 = 2^2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \longrightarrow & 8 = 2^3 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \longrightarrow & 16 = 2^4
\end{array}$$

La razón es muy sencilla: cada elemento de una fila se utiliza dos veces como sumando para formar la fila siguiente. Por ejemplo, para obtener la fila 4.ª a partir de la 3.ª:



Por tanto, la suma de cada fila es doble que la suma de la fila anterior.

ACTIVIDADES

1 Escribe como cociente de factoriales:

a) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \boxed{}$

b) $19 \cdot 18 \cdot 17 = \boxed{}$

c) $n(n-1)(n-2)(n-3) = \boxed{}$

d) $(n+1)\,n\,(n-1) = \boxed{}$

e) $(n-1)(n-2)\dots(n-9) = \boxed{}$

f) $(m+2)(m+1)\dots(n+1)\,n\,(n-1) = \boxed{}$

2 Simplifica los siguientes cocientes entre factoriales:

a) $\dfrac{7!}{5!} = \boxed{}$

b) $\dfrac{8!}{9!} = \boxed{}$

c) $\dfrac{9!}{5!\,4!} = \boxed{}$

d) $\dfrac{m!}{(m-1)!} = \boxed{}$

e) $\dfrac{(m+1)!}{m!} = \boxed{}$

f) $\dfrac{(m+1)!}{(m-1)!} = \boxed{}$

4. Amplía: factoriales y números combinatorios

3 Resuelve las ecuaciones:

a) $V_{x,\,2} = 7x \;\rightarrow$ ☐

b) $VR_{x,\,2} - V_{x,\,2} = 8 \;\rightarrow$ ☐

c) $V_{x,\,2} - V_{x-2,\,2} = 62 \;\rightarrow$ ☐

d) $VR_{x,\,3} - VR_{x,\,2} = 180 \;\rightarrow$ ☐

4 Calcula utilizando factoriales y simplifica:

a) $C_{m+2,\,n} =$ ☐

b) $C_{m+1,\,m-1} =$ ☐

5 Escribe la fila once del triángulo de Tartaglia.

6 Calcula:

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \dots + \binom{8}{8} = \square$$

7 ¿Cuántas aleaciones distintas se pueden formar con 6 metales diferentes? Cada aleación debe estar formada por dos o más metales.

Solución: ☐

8 Resuelve las ecuaciones siguientes sin desarrollar los números combinatorios:

a) $\binom{8}{3} + \binom{8}{x} = \binom{9}{4} \;\rightarrow$ ☐

b) $\binom{11}{3} + \binom{11}{x} = \binom{12}{3} \;\rightarrow$ ☐

c) $\binom{17}{x} = \binom{17}{x+1} \;\rightarrow$ ☐

9 Tienes 8 monedas (2 €, 1 €, 50 cent., 20 cent., 10 cent., 5 cent., 2 cent. y 1 cent.). Te piden un donativo y puedes responder de muchas formas distintas: no dar nada, dar una moneda, dos…, todas. ¿Cuántas posibles respuestas hay?

Solución: ☐

4. Amplía: factoriales y números combinatorios

10 Resuelve sin desarrollar:

a) $\binom{39}{5+2x} = \binom{39}{2x-2} \rightarrow$ ☐

b) $\binom{33}{x} + \binom{33}{x+y} = \binom{34}{5} \rightarrow$ ☐

11 Calcula x en cada una de las siguientes expresiones:

a) $\binom{10}{3} = \binom{10}{x} \rightarrow$ ☐

b) $\binom{x}{7} = \binom{x}{8} \rightarrow$ ☐

c) $\binom{9}{2} = \binom{9}{x-2} \rightarrow$ ☐

d) $\binom{11}{5} + \binom{11}{x} = \binom{12}{5} \rightarrow$ ☐

e) $\binom{13}{x} = \binom{13}{x-1} \rightarrow$ ☐

f) $\binom{18}{7} + \binom{x}{8} = \binom{19}{8} \rightarrow$ ☐

12 Resuelve:

a) $\binom{25}{3+2x} = \binom{25}{x-2} \rightarrow$ ☐

b) $\binom{17}{3x-2} = \binom{17}{x-1} \rightarrow$ ☐

c) $\binom{23}{x} + \binom{23}{y} = \binom{24}{8} \rightarrow$ ☐

d) $\binom{19}{x} + \binom{19}{x+1} = \binom{20}{7} \rightarrow$ ☐

13 Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{x!}{(x-2)!} =$ ☐

b) $\dfrac{(x+1)!}{(x-1)!} =$ ☐

c) $\dfrac{4x!}{3\,(x-1)!} =$ ☐

14 ¿Qué relación tiene que existir entre a y b para que se verifique la igualdad $\binom{m}{a} = \binom{m}{b}$?

Solución: ☐

15 Calcula razonadamente el valor de:

a) $\binom{1000}{999} =$

b) $\binom{1000}{998} =$

16 a) Calcula: $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \ldots + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} =$ ☐

b) Halla: $\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \ldots + \binom{m}{m} =$ ☐

4. Amplía: fórmula del binomio de Newton

Como sabemos, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Operando se pueden obtener las sucesivas potencias de $a + b$.

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = (a + b)^3 \cdot (a + b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Para observar las regularidades que se producen, ordenamos los resultados:

$(a + b)^1$	$a + b$	1 1
$(a + b)^2$	$a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$(a + b)^3$	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$(a + b)^4$	$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1

Para que se aprecie mejor el resultado, hemos aislado a la derecha los coeficientes.

Los coeficientes son las sucesivas filas del triángulo de Tartaglia.

Obtengamos razonadamente la siguiente potencia: $(a + b)^5$. Para ello, multiplicamos $(a + b)^4 \cdot (a + b)$. Lo hacemos multiplicando primero por a (flecha azul), después por b (flecha roja) y sumando los resultados.

$$\begin{array}{cccccc}
a^4 & 4a^3b & 6a^2b^2 & 4ab^3 & b^4 & \\
 & a^4b & 4a^3b^2 & 6a^2b^3 & 4ab^4 & b^5 \\
a^5 & 4a^4b & 6a^3b^2 & 4a^2b^3 & ab^4 & \\
\hline
1a^5 & (1 + 4)\, a^4b & (4 + 6)\, a^3b^2 & (6 + 4)\, a^2b^3 & (4 + 1)\, ab^4 & 1 \cdot b^5
\end{array}$$

Observamos que:

- Aparecen todos los posibles términos de 5.º grado: a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4 y b^5.
- Sus coeficientes son la suma de coeficientes de los términos que tienen encima, es decir, constituyen la fila 5 del triángulo de Tartaglia (puesto que los que tienen encima son la fila 4).

En general, se obtiene la llamada **fórmula del binomio de Newton:**

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

No olvides que en la fórmula del binomio de Newton, los coeficientes de los sucesivos términos son los números de la fila n-ésima del triángulo de Tartaglia.

4. Amplía: fórmula del binomio de Newton

ACTIVIDADES

1 Desarrolla:

a) $(x + 3)^5 =$

b) $(2x - x^2)^4 =$

c) $\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}\right)^6 =$

2 Calcula el quinto término de:

a) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} + 1\right)^{10}$

b) $\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{x}\right)^6$

3 Calcula el coeficiente de x^5 en el desarrollo del binomio $\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{x}\right)^8$

4 ¿Qué signo tendrá el séptimo término del binomio del ejercicio anterior? ¿Cuál será el término de mayor grado?

5 Desarrolla:

a) $(x - 3)^5 =$

b) $(2x - 1)^4 =$

c) $(2x + 3)^3 =$

4. Amplía: fórmula del binomio de Newton

6 Calcula el cuarto término en cada caso:

a) $(2x - 5)^5$

b) $\left(\frac{x}{2} + 3\right)^6$

c) $(x^2 - 2x)^3$

7 En el desarrollo del binomio $(x^2 - 3x)^6$ escribe el tercero y el quinto términos.

4. Amplía: factoriales y números combinatorios
Soluciones

Factoriales

El número de permutaciones de n elementos es:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

A este producto de n factores decrecientes a partir de n se le designa por $n!$ que se lee "factorial de n" o "n factorial".

Por ejemplo, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

El valor de $n!$ crece enormemente deprisa al aumentar n. Por ejemplo:

$10! = 3\,628\,000$

$20!$ tiene 18 cifras

La fórmula de las variaciones se puede expresar muy cómodamente con factoriales:

$$V_{m,\,n} = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) \overset{(1)}{=}$$

$$= \frac{[m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)] \cdot [(m-n) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1]}{(m-n) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

(1) Hemos multiplicado numerador y denominador por $(m-n)!$ para conseguir en el numerador $m!$.

Por ejemplo: $V_{7,\,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{7!}{4!}$

Números combinatorios

Los números que se obtienen al aplicar la fórmula de las combinaciones, $C_{m,\,n}$, se llaman **números combinatorios** y se suelen designar así: $\binom{m}{n}$. Se lee m *sobre* n.

Por ejemplo: $\binom{7}{3} = C_{7,\,3} = \dfrac{V_{7,\,3}}{P_3} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

Los números combinatorios pueden expresarse, también, con factoriales:

$$\binom{m}{n} = \frac{V_{m,\,n}}{P_n} = \frac{m!\,/\,(m-n)!}{n!} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Por ejemplo: $\binom{7}{3} = \dfrac{V_{7,\,3}}{P_3} = \dfrac{7!\,/\,4!}{P_3} = \dfrac{7!}{3! \cdot 4!}$

Los factoriales son muy cómodos para manejar expresiones teóricas. Pero para cálculos numéricos son preferibles las fórmulas sin ellos.

4. Amplía: factoriales y números combinatorios
Soluciones

Propiedades de los números combinatorios

Los números combinatorios tienen interesantes propiedades. Vamos a ver algunas:

I. $\binom{m}{0} = 1, \ \binom{m}{m} = 1$

$\binom{m}{0}$ significa el número de combinaciones *con ningún elemento* que se pueden hacer con m elementos.

Solo el conjunto vacío tiene “ningún elemento”. Es decir, solo hay una.

$\binom{m}{m}$ es el número de combinaciones que se pueden hacer con todos los elementos. Es claro que solo hay una.

Por ejemplo: $\binom{7}{0} = 1, \ \binom{7}{7} = 1$

II. $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$ Pues, si disponemos de m elementos, cada vez que escogemos n nos quedan $m - n$.

Es decir, cada vez que formamos una combinación de n elementos, nos queda otra de $m - n$.

Por ejemplo: $\binom{7}{3} = \binom{7}{4}, \ \binom{100}{99} = \binom{100}{1}$

III. $\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \binom{m}{n}$

Por ejemplo: $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}, \ \binom{7}{5} + \binom{7}{6} = \binom{8}{6}, \ \binom{11}{7} + \binom{11}{8} = \binom{12}{8}$

La justificación de esta propiedad es más complicada que la de las anteriores; por eso la demostramos con una historieta.

Empecemos probando que: $\binom{6}{3} + \binom{6}{4} = \binom{7}{4}$

Leticia y Héctor son una pareja de recién casados. Tienen 7 objetos de adorno y una vitrina donde caben 4 de ellos.

El número de posibles elecciones es: $\binom{7}{4}$

Pero en el momento de hacer la elección surge una pequeña diferencia de criterio: Leticia exige que uno de los objetos sea el retrato de su madre, mientras que Héctor rechaza esta posibilidad.

- ¿Cuántas son las posibilidades que admite Leticia? Tantas como formas de seleccionar los 3 objetos que acompañarán al retrato de su madre, es decir: $\binom{6}{3}$

- ¿Cuántas son las posibilidades que admite Héctor? Tantas como formas de seleccionar 4 objetos de entre los 6 que no son el retrato de su suegra, es decir: $\binom{6}{4}$

Pero fíjate que, necesariamente, si seleccionan 4 objetos, uno de los dos se saldrá con la suya. Es decir, que cualquier posible selección o es de las que quiere Leticia, o es de las que quiere Héctor. Por tanto:

$$\binom{6}{3} + \binom{6}{4} = \binom{7}{4}$$

Si en lugar de 7 objetos tuvieran m, y en la vitrina en vez de 4 cupiesen n, el mismo razonamiento nos llevaría a la demostración de la fórmula.

Triángulo de Tartaglia

Tartaglia (se lee *Tartalla*) fue un matemático italiano del siglo XVI. Su verdadero nombre era Niccolò Fontana. En una guerra recibió un golpe, a consecuencia del cual quedó tartamudo. Su apodo, Tartaglia (tartaja), se hizo tan popular que él mismo firmaba así sus libros.

Pues bien, para resaltar las propiedades de los números combinatorios, a este matemático se le ocurrió ponerlos del siguiente modo:

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

Sus correspondientes valores son los de la derecha.

1 1

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

Puedes comprobarlo.

1 2 1

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

1 3 3 1

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

1 4 6 4 1

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

1 5 10 10 5 1

Esta configuración responde a las propiedades de arriba.

- Todos los elementos de los extremos valen 1 (Propiedad I).
- En cada fila, los elementos simétricos son iguales (Propiedad II).
- Cada elemento, salvo los de los extremos, se obtiene sumando los dos que tiene encima (Propiedad III).

De este modo, cada línea del triángulo de Tartaglia se obtiene de la anterior: se empieza y se termina con 1 y cada uno de los demás términos se halla sumando los dos que tiene encima.

5.ª 1 5 10 10 5 1

6.ª 1 6 15 20 15 6 1

7.ª 1 7 21 35 35 21 7 1

4. Amplía: factoriales y números combinatorios

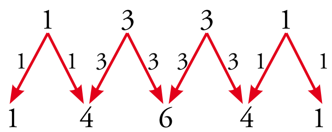
Soluciones

OTRA PROPIEDAD DEL TRIÁNGULO DE TARTAGLIA

La suma de los elementos de la fila n-ésima es 2^n.

$$\begin{array}{ccccccccccl}
 & & & 1 & & 1 & & & & \longrightarrow & 2 = 2^1 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & \longrightarrow & 4 = 2^2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \longrightarrow & 8 = 2^3 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \longrightarrow & 16 = 2^4
\end{array}$$

La razón es muy sencilla: cada elemento de una fila se utiliza dos veces como sumando para formar la fila siguiente. Por ejemplo, para obtener la fila 4.ª a partir de la 3.ª:



Por tanto, la suma de cada fila es doble que la suma de la fila anterior.

ACTIVIDADES

1 Escribe como cociente de factoriales:

a) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \boxed{\dfrac{7!}{2!}}$

b) $19 \cdot 18 \cdot 17 = \boxed{\dfrac{19!}{16!}}$

c) $n(n-1)(n-2)(n-3) = \boxed{\dfrac{n!}{(n-4)!}}$

d) $(n+1)\,n\,(n-1) = \boxed{\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!}}$

e) $(n-1)(n-2)\ldots(n-9) = \boxed{\dfrac{(n-1)!}{(n-10)!}}$

f) $(m+2)(m+1)\ldots(n+1)\,n\,(n-1) = \boxed{\dfrac{(m+2)!}{(n-2)!}}$

2 Simplifica los siguientes cocientes entre factoriales:

a) $\dfrac{7!}{5!} = \boxed{7 \cdot 6}$

b) $\dfrac{8!}{9!} = \boxed{\dfrac{1}{9}}$

c) $\dfrac{9!}{5!\,4!} = \boxed{\dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}$

d) $\dfrac{m!}{(m-1)!} = \boxed{m}$

e) $\dfrac{(m+1)!}{m!} = \boxed{m+1}$

f) $\dfrac{(m+1)!}{(m-1)!} = \boxed{(m+1) \cdot m}$

4. Amplía: factoriales y números combinatorios
Soluciones

3 Resuelve las ecuaciones:

a) $V_{x,\,2} = 7x \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 8}$

b) $VR_{x,\,2} - V_{x,\,2} = 8 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 8}$

c) $V_{x,\,2} - V_{x-2,\,2} = 62 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 17}$

d) $VR_{x,\,3} - VR_{x,\,2} = 180 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 6}$

4 Calcula utilizando factoriales y simplifica:

a) $C_{m+2,\,n} = \boxed{\dfrac{(m+2)\cdot(m+1)\cdot\ldots\cdot(m-n)\cdot(m+1-n)}{n!}}$

b) $C_{m+1,\,m-1} = \boxed{\dfrac{m\cdot(m+1)}{2}}$

5 Escribe la fila once del triángulo de Tartaglia.

$$\binom{11}{0} \quad \binom{11}{1} \quad \binom{11}{2} \quad \binom{11}{3} \quad \binom{11}{4} \quad \binom{11}{5} \quad \binom{11}{6} \quad \binom{11}{7} \quad \binom{11}{8} \quad \binom{11}{9} \quad \binom{11}{10} \quad \binom{11}{11}$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$$

$$1 \quad 11 \quad 55 \quad 165 \quad 330 \quad 462 \quad 462 \quad 330 \quad 165 \quad 55 \quad 11 \quad 1$$

6 Calcula:

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \ldots + \binom{8}{8} = \boxed{2^8 = 256}$$

7 ¿Cuántas aleaciones distintas se pueden formar con 6 metales diferentes? Cada aleación debe estar formada por dos o más metales.

Solución: $\boxed{2^6 - 6 - 1 = 64 - 7 = 57 \text{ aleaciones distintas}}$

2^6 son todas las posibles combinaciones de 6 elementos. 6 son las combinaciones de 6 elementos tomados 1 a 1, pero con un único metal no hay aleación. 1 es la combinación de ningún elemento.

8 Resuelve las ecuaciones siguientes sin desarrollar los números combinatorios:

a) $\binom{8}{3} + \binom{8}{x} = \binom{9}{4} \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 4}$

b) $\binom{11}{3} + \binom{11}{x} = \binom{12}{3} \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 2}$

c) $\binom{17}{x} = \binom{17}{x+1} \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 8}$

9 Tienes 8 monedas (2 €, 1 €, 50 cent., 20 cent., 10 cent., 5 cent., 2 cent. y 1 cent.). Te piden un donativo y puedes responder de muchas formas distintas: no dar nada, dar una moneda, dos…, todas. ¿Cuántas posibles respuestas hay?

Solución: $\boxed{\text{Hay } 2^8 = 256 \text{ posibles respuestas.}}$

4. Amplía: factoriales y números combinatorios
Soluciones

10 Resuelve sin desarrollar:

a) $\binom{39}{5+2x} = \binom{39}{2x-2} \rightarrow \boxed{x = 9}$

b) $\binom{33}{x} + \binom{33}{x+y} = \binom{34}{5} \rightarrow \boxed{x = 4;\ y = 1}$

11 Calcula x en cada una de las siguientes expresiones:

a) $\binom{10}{3} = \binom{10}{x} \rightarrow \boxed{x = 7 \text{ o } x = 3}$

b) $\binom{x}{7} = \binom{x}{8} \rightarrow \boxed{x = 15}$

c) $\binom{9}{2} = \binom{9}{x-2} \rightarrow \boxed{x = 9 \text{ o } x = 4}$

d) $\binom{11}{5} + \binom{11}{x} = \binom{12}{5} \rightarrow \boxed{x = 4 \text{ o } x = 7}$

e) $\binom{13}{x} = \binom{13}{x-1} \rightarrow \boxed{x = 7}$

f) $\binom{18}{7} + \binom{x}{8} = \binom{19}{8} \rightarrow \boxed{x = 18}$

12 Resuelve:

a) $\binom{25}{3+2x} = \binom{25}{x-2} \rightarrow \boxed{x = 8}$

b) $\binom{17}{3x-2} = \binom{17}{x-1} \rightarrow \boxed{x = 5}$

c) $\binom{23}{x} + \binom{23}{y} = \binom{24}{8} \rightarrow \boxed{x = 7,\ y = 8}$

d) $\binom{19}{x} + \binom{19}{x+1} = \binom{20}{7} \rightarrow \boxed{x = 6}$

13 Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{x!}{(x-2)!} = \boxed{x^2 - x}$

b) $\dfrac{(x+1)!}{(x-1)!} = \boxed{x^2 + x}$

c) $\dfrac{4x!}{3\,(x-1)!} = \boxed{\dfrac{4}{3}x}$

14 ¿Qué relación tiene que existir entre a y b para que se verifique la igualdad $\binom{m}{a} = \binom{m}{b}$?

Solución: $\boxed{a = b \text{ o } a = m - b}$

15 Calcula razonadamente el valor de:

a) $\binom{1000}{999} = \binom{1000}{1} = 1\,000$

b) $\binom{1000}{998} = \binom{1000}{2} = 499\,500$

16 a) Calcula: $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \dots + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = \boxed{2^8 = 256}$

b) Halla: $\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \dots + \binom{m}{m} = \boxed{2^m}$

4. Amplía: fórmula del binomio de Newton

Soluciones

Como sabemos, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Operando se pueden obtener las sucesivas potencias de $a + b$.

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = (a + b)^3 \cdot (a + b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Para observar las regularidades que se producen, ordenamos los resultados:

$(a + b)^1$	$a + b$	1 1
$(a + b)^2$	$a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$(a + b)^3$	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$(a + b)^4$	$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1

Para que se aprecie mejor el resultado, hemos aislado a la derecha los coeficientes.

Los coeficientes son las sucesivas filas del triángulo de Tartaglia.

Obtengamos razonadamente la siguiente potencia: $(a + b)^5$. Para ello, multiplicamos $(a + b)^4 \cdot (a + b)$. Lo hacemos multiplicando primero por a (flecha azul), después por b (flecha roja) y sumando los resultados.

$$\begin{array}{cccccc}
 & a^4 & 4a^3b & 6a^2b^2 & 4ab^3 & b^4 \\
 & a^4b & 4a^3b^2 & 6a^2b^3 & 4ab^4 & b^5 \\
a^5 & 4a^4b & 6a^3b^2 & 4a^2b^3 & ab^4 & \\
\hline
1a^5 & (1+4)\,a^4b & (4+6)\,a^3b^2 & (6+4)\,a^2b^3 & (4+1)\,ab^4 & 1 \cdot b^5
\end{array}$$

Observamos que:

- Aparecen todos los posibles términos de 5.° grado: a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4 y b^5.
- Sus coeficientes son la suma de coeficientes de los términos que tienen encima, es decir, constituyen la fila 5 del triángulo de Tartaglia (puesto que los que tienen encima son la fila 4).

En general, se obtiene la llamada **fórmula del binomio de Newton:**

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

No olvides que en la fórmula del binomio de Newton, los coeficientes de los sucesivos términos son los números de la fila n-ésima del triángulo de Tartaglia.

4. Amplía: fórmula del binomio de Newton

Soluciones

ACTIVIDADES

1 Desarrolla:

a) $(x+3)^5 =$ $\boxed{x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243}$

b) $(2x - x^2)^4 =$ $\boxed{16x^4 - 32x^5 + 24x^6 - 8x^7 + x^8}$

c) $\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}\right)^6 =$ $\boxed{\dfrac{x^6}{64} + \dfrac{3x^4}{16} + \dfrac{15x^2}{16} + \dfrac{5}{2} + \dfrac{15}{4x^2} + \dfrac{3}{x^4} + \dfrac{1}{x^6}}$

2 Calcula el quinto término de:

a) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} + 1\right)^{10}$ $\boxed{\text{Quinto término} = \dfrac{13\,440}{x^3}}$

b) $\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{x}\right)^6$ $\boxed{\text{Quinto término} = -\dfrac{1\,215}{4x^2}}$

3 Calcula el coeficiente de x^5 en el desarrollo del binomio $\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{x}\right)^8$

Su coeficiente es cero.

4 ¿Qué signo tendrá el séptimo término del binomio del ejercicio anterior? ¿Cuál será el término de mayor grado?

El signo del término séptimo es negativo.

El término de mayor grado es el primero: $\dfrac{x^{16}}{256}$

5 Desarrolla:

a) $(x-3)^5 =$ $\boxed{x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243}$

b) $(2x-1)^4 =$ $\boxed{16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1}$

c) $(2x+3)^3 =$ $\boxed{8x^3 + 36x^2 + 54x + 27}$

4. Amplía: fórmula del binomio de Newton
Soluciones

6 Calcula el cuarto término en cada caso:

a) $(2x - 5)^5$ Cuarto término = $-5\,000x^2$

b) $\left(\frac{x}{2} + 3\right)^6$ Cuarto término = $\frac{135}{2}x^3$

c) $(x^2 - 2x)^3$ Cuarto término = $-8x^3$

7 En el desarrollo del binomio $(x^2 - 3x)^6$ escribe el tercero y el quinto términos.

Tercer término = $135x^{10}$; quinto término = $1\,215x^8$