5. Un enfoque distinto: perpendicularidad y paralelismo entre rectas, sin vectores

Pendiente de rectas paralelas

La pendiente de una recta marca su dirección. Por tanto, dos rectas paralelas, que tienen la misma dirección, han de tener la misma pendiente.

Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente.

Recuerda que si la recta viene dada por su ecuación, **su pendiente es el coeficiente de la x cuando la y está despejada.** Por tanto, para hallar la pendiente de una recta dada por su ecuación:

- Despeja la y.
- Observa el coeficiente de la x.

Por ejemplo:

$y = 5x + 3 \rightarrow$ PENDIENTE $m = 5$

$y + 3x - 2 = 0 \rightarrow y = -3x + 2 \rightarrow$ PENDIENTE $m = -3$

$2x - 5y + 7 = 0 \rightarrow y = \frac{2}{5}x + \frac{7}{5} \rightarrow$ PENDIENTE $m = \frac{2}{5}$

Ejemplo

Hallar, en cada caso, la recta r' que pasa por P y es paralela a r:

a) $r: y = 4x + 7,\ P(5, -3)$

b) $r: 5x + 7y + 4 = 0,\ P(-2, 1)$

c) $r: 2x + 3 = 0,\ P(4, 3)$

a) Hemos de escribir la recta que pasa por $(5, -3)$ y cuya pendiente es 4:

$$r': y = 4(x - 5) - 3 \rightarrow y = 4x - 20 - 3 \rightarrow y = 4x - 23$$

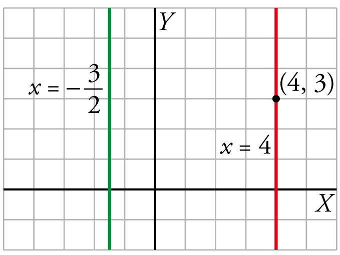
b) Hallamos la pendiente de r despejando la y:

$7y = -5x - 4 \rightarrow y = -\frac{5}{7}x - \frac{4}{7}$. La pendiente de r es $-\frac{5}{7}$.

Hemos de escribir la ecuación de la recta que pasa por $(-2, 1)$ y cuya pendiente es $-5/7$:

$$r': y = -\frac{5}{7}(x + 2) + 1 \rightarrow 7y = -5x - 10 + 7 \rightarrow 5x + 7y + 3 = 0$$

c)



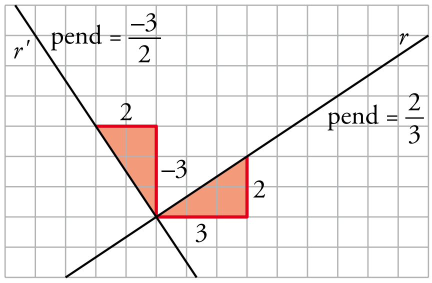
$r: 2x + 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$

Se trata de una recta paralela al eje Y. Por tanto, la recta buscada también es paralela al eje Y. Como pasa por el punto $(4, 3)$, se trata de la recta $x = 4$.

5. Un enfoque distinto: perpendicularidad y paralelismo entre rectas, sin vectores

PENDIENTE DE UNA RECTA PERPENDICULAR A OTRA

Las rectas r y r' son perpendiculares. Por tanto, los triángulos señalados son iguales. Observando sus catetos concluimos:



- La pendiente de r es $m = \frac{2}{3}$.
- La pendiente de r' es $-\frac{3}{2} = -\frac{1}{m}$.

Esta relación es válida en general.

Las pendientes m_1 y m_2 de dos rectas perpendiculares se relacionan así:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \text{o bien} \quad m_1 = \frac{-1}{m_2}$$

EJEMPLO 1

Hallar, en cada caso, la ecuación de la recta r' que pasa por P y es perpendicular a r:

a) $P(4, -2)$, $r: y = 2x - 7$ b) $P(-5, 0)$, $r: 2x - 5y + 7 = 0$ c) $P(3, 2)$, $r: 2x + 6 = 0$

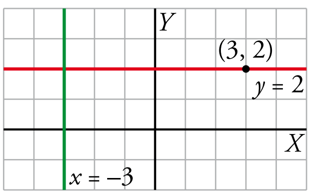
a) La pendiente de r es $m = 2 \to$ la pendiente de r' es $m' = -\frac{1}{2}$.

La ecuación de r' es $y = -\frac{1}{2}(x - 4) - 2$.

b) Hallamos la pendiente de r: $\quad 2x - 5y + 7 = 0 \to 5y = 2x + 7 \to y = \frac{2}{5}x + \frac{7}{5} \to m = \frac{2}{5}$

La pendiente de r' es $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{5}{2} \to$ La ecuación de r' es $y = -\frac{5}{2}(x + 5)$.

c)



$2x + 6 = 0 \to x = -3$

r es una recta paralela al eje Y. Por tanto, la recta r' es paralela al eje X. Como pasa por el punto (3, 2), su ecuación es $y = 2$.

EJEMPLO 2

Hallar el valor de k para que $r': 2x - ky + 11 = 0$ sea perpendicular a $r: 5x + 2y = 0$.

Pendiente de r': $ky = 2x + 11 \to y = \frac{2}{k}x + \frac{11}{k} \to m' = \frac{2}{k}$

Pendiente de r: $2y = -5x \to y = -\frac{5}{2}x \to m = -\frac{5}{2}$

Por ser perpendiculares, $m \cdot m' = -1 \to \frac{2}{k} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -1 \to k = 5$