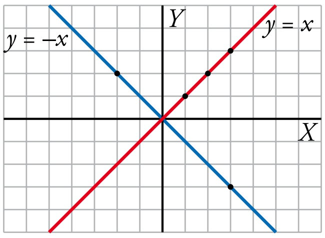
4. Un enfoque distinto: ecuaciones de rectas sin vectores

La ecuación de una recta, como sabes, es una relación algebraica entre las coordenadas (x, abscisa e y, ordenada) de todos sus puntos.

En la ecuación de una recta, llamamos (x, y) a las coordenadas de un punto cualquiera, variable. Se suele denominar **punto genérico** de la recta.

Veamos esta idea en algunas rectas concretas.

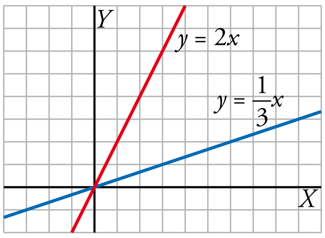
Bisectrices de los cuadrantes



La recta roja (a la que se suele designar como **bisectriz del primer cuadrante**) tiene la peculiaridad de que sus puntos (0, 0), (1, 1), (7, 7), (–4, –4), … tienen iguales sus coordenadas. Por eso, su ecuación es $y = x$.

Los puntos de la recta azul (**bisectriz del segundo cuadrante**) tienen las coordenadas iguales y con el signo cambiado: (–1, 1), (2, –2), (–2, 2), (11, –11), … Por eso, su ecuación es $y = -x$.

Otras rectas que pasan por el origen

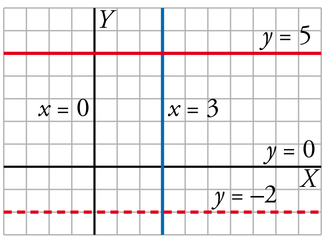


Los puntos de la recta roja tienen una y doble que la x (1, 2), (2, 4), (3, 6), (–1, –2), … Por tanto, su ecuación es $y = 2x$. El 2 es la pendiente.

En la recta azul (3, 1), (6, 2), (9, 3), (–3, –1), la ordenada es la tercera parte de la abscisa. Su ecuación es $y = \frac{1}{3}x$. La pendiente es $\frac{1}{3}$.

En general, las rectas que pasan por el origen de coordenadas tienen por ecuación $y = mx$, donde m es la pendiente.

Rectas paralelas a los ejes



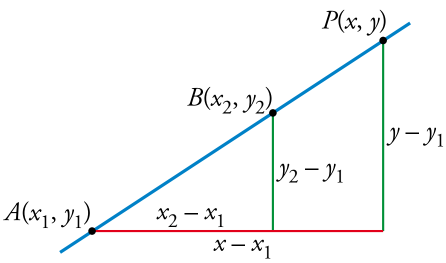
Todos los puntos de la recta roja (–2, 5), (0, 5), (3, 5), (7, 5), … tienen la misma ordenada: $y = 5$. Esta es, precisamente, su ecuación: $y = 5$.

La recta roja punteada tiene por ecuación $y = -2$.

Todos los puntos de la recta azul tienen la misma abscisa: $x = 3$. Por eso, su ecuación es $x = 3$.

La ecuación de una recta paralela al eje X es $y = k$. El propio eje X es $y = 0$.
La ecuación de una recta paralela al eje Y es $x = k$. El propio eje Y es $x = 0$.

ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS



En el gráfico de la izquierda, la recta azul pasa por $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$. Un punto genérico, $P(x, y)$, de la recta está alineado con A y B. Por tanto, los dos triángulos rectángulos son semejantes:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Esta es la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$.

La ecuación anterior puede expresarse del siguiente modo:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \rightarrow y = m(x - x_1) + y_1$$

donde m es la pendiente del segmento de extremos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

La ecuación $y = m(x - x_1) + y_1$ es la de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m. Es lógico que lo que obtenemos por el nuevo procedimiento coincida con lo que se obtiene por el procedimiento que ya conocíamos.

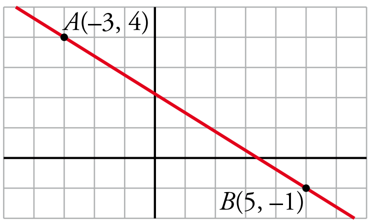
EJEMPLO

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

a) $A(-3, 4)$, $B(5, -1)$ *b)* $P(5, -1)$, $Q(5, 7)$ *c)* $R(-2, 6)$, $S(7, 6)$

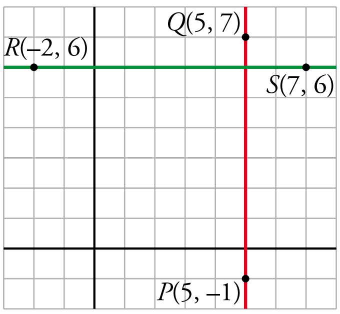
a) $\dfrac{y - 4}{-1 - 4} = \dfrac{x - (-3)}{5 - (-3)} \rightarrow \dfrac{y - 4}{-5} = \dfrac{x + 3}{8} \rightarrow$

$\rightarrow y - 4 = -\dfrac{5}{8}(x + 3) \rightarrow y = -\dfrac{5}{8}(x + 3) + 4$



Observa que hemos llegado a la expresión de la recta que pasa por $(-3, 4)$ y tiene la pendiente $-5/8$ (es la pendiente del segmento cuyos extremos son A y B).

b) y c)



$\dfrac{y - (-1)}{7 - (-1)} = \dfrac{x - 5}{5 - 5}$ ¿Qué hacemos con este $5 - 5 = 0$ en el denominador? ¡No podemos seguir!

Esta fórmula no sirve cuando los dos puntos tienen la misma abscisa o la misma ordenada. Pero en estos casos, la recta es paralela al eje X o al eje Y, y su ecuación es muy sencilla.

- Como P y Q tienen abscisa 5, la ecuación de la recta es $x = 5$.

  Es una recta paralela al eje Y.
- Como R y S tienen la misma ordenada, 6, la ecuación de la recta es $y = 6$. Es una recta paralela al eje X.