5. Ampliación teórica: resolución de triángulos cualesquiera: teoremas de los senos y del coseno

Hemos visto que, mediante la estrategia de la altura, podemos resolver triángulos cualesquiera trazando una de sus alturas y resolviendo los dos triángulos rectángulos que se forman.

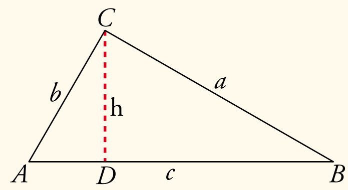
Si en vez de seguir esta estrategia con cada triángulo en particular, la realizamos con un triángulo cualquiera de lados a, b, c y ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, obtenemos unas fórmulas con las que la resolución de triángulos oblicuángulos se realiza de forma casi automática.

Teorema de los senos

En un triángulo cualquiera, si dos lados son iguales sus ángulos opuestos también lo son; y si un lado es mayor que otro, sus ángulos opuestos también cumplen la misma relación. Esta propiedad se concreta del siguiente modo:

En un triángulo cualquiera de lados a, b, c y ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$



Para demostrar la primera de las igualdades, se traza la altura h sobre el lado c, con lo que se obtienen dos triángulos rectángulos ADC y CDB.

$$\left.\begin{array}{l} \text{En } ADC\text{: } sen\,\hat{A} = \dfrac{h}{b} \;\rightarrow\; h = b\,sen\,\hat{A} \\[2ex] \text{En } CDB\text{: } sen\,\hat{B} = \dfrac{h}{a} \;\rightarrow\; h = a\,sen\,\hat{B} \end{array}\right\}\; b\,sen\,\hat{A} = a\,sen\,\hat{B} \;\rightarrow\; \frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}}$$

Trazando la altura desde el vértice A se obtendría la segunda igualdad.

Aplicaciones del teorema de los senos

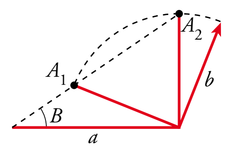
El teorema de los senos da lugar a tres igualdades:

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} \qquad \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} \qquad \frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}$$

Cada una de ellas relaciona dos lados con los ángulos opuestos. Por tanto, con ellas se puede resolver un triángulo en el cual los datos y las incógnitas sean dos lados y sus ángulos opuestos. (Recordemos que conocer dos ángulos es equivalente a conocer los tres).

TRIÁNGULOS QUE SE PUEDEN RESOLVER	
DATOS	**INCÓGNITA**
Dos ángulos y un lado	Otro lado
Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos	Otro ángulo

Cuando al aplicar el teorema de los senos la incógnita es uno de los ángulos, puede haber dos soluciones, pues hay dos ángulos con el mismo seno, uno agudo y otro obtuso.

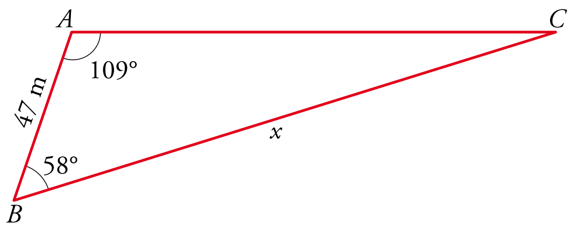


$\hat{A}_1$ es obtuso; $\hat{A}_2$ es agudo

Veamos dos ejemplos de aplicación:

Ejemplo 1

La distancia de A a B es 47 m. Conocemos los ángulos $\hat{A} = 109°$, $\hat{B} = 58°$. ¿Cuál es la distancia de B a C?



Empezamos por calcular $\hat{C}$, que es el ángulo opuesto al lado conocido:

$$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 13°$$

Aplicamos el teorema de los senos:

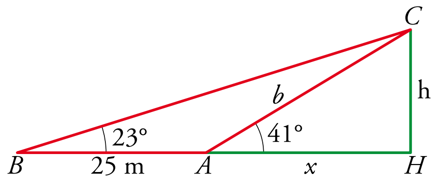
$$\frac{x}{sen\ 109°} = \frac{47}{sen\ 13°} \;\rightarrow\; x = 47 \cdot \frac{sen\ 109°}{sen\ 13°} = 197{,}55$$

Solución: La distancia de B a C es de 197,55 m.

Ejemplo 2

Vamos a resolver el ejercicio resuelto de la página 157 del libro, mediante el teorema de los senos.

Quieres conocer el ancho de un río y la altura de un árbol que está en la orilla opuesta. Para ello, te sitúas frente al árbol y mides el ángulo que forma con la horizontal la visual a la parte alta del árbol (41°). Te alejas del árbol en dirección perpendicular a la orilla, andando 25 m. Vuelves a medir el ángulo que forma con la horizontal la visual a la parte alta del árbol. Ahora son 23°.



En el triángulo ABC conocemos dos ángulos, $\hat{B} = 23°$, $\hat{A} = 180° - 41° = 139°$.

Por tanto, podemos calcular el tercer ángulo: $\hat{C} = 180° - (23° + 139°) = 18°$

Aplicando el teorema de los senos, podemos calcular el lado $\overline{AC} = b$:

$$\frac{b}{sen\ 23°} = \frac{25}{sen\ 18°} \quad \to \quad b = 25 \cdot \frac{sen\ 23°}{sen\ 18°} = 31{,}6 \text{ m}$$

Conociendo b, hipotenusa del triángulo rectángulo AHC, podemos hallar sus catetos:

$h = b\ sen\ 41° = 20{,}7$. La altura del árbol es 20,7 m.

$x = b\ cos\ 41° = 23{,}8$. El ancho del río es de 23,8 m.

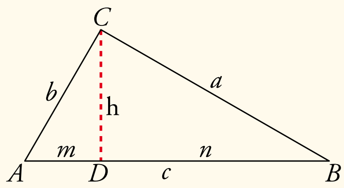
Las diferencias observadas con relación a la solución de la página 157 son debidas a los redondeos efectuados en los pasos intermedios.

Teorema del coseno

El teorema de Pitágoras se generaliza para triángulos cualesquiera mediante las siguientes igualdades:

En un triángulo cualquiera se cumple que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$



Para demostrar la primera de las igualdades, aplicamos el teorema de Pitágoras en cada uno de los dos triángulos rectángulos que se forman al trazar la altura h, ADC y CDB.

En CDB $\rightarrow$ $a^2 = \text{h}^2 + n^2 = \text{h}^2 + (c - m)^2 = \text{h}^2 + c^2 + m^2 - 2cm$

En ADC $\rightarrow$ $b^2 = \text{h}^2 + m^2$

Restando:

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2cm$$
$$\downarrow$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$$
$$\downarrow (*)$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

(*) Para llegar a la última igualdad, tenemos en cuenta que en ADC $\cos \hat{A} = \dfrac{m}{b}$ $\rightarrow$ $m = b \cos \hat{A}$

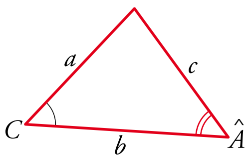
Las otras dos igualdades se prueban de forma similar.

Aplicaciones del teorema del coseno

El teorema del coseno sirve para relacionar los tres lados de un triángulo con uno de sus ángulos. Por tanto, se podrá resolver con él cualquier triángulo en el que se conozcan los tres lados, o bien, dos lados y un ángulo.

TRIÁNGULOS QUE SE PUEDEN RESOLVER	
DATOS	**INCÓGNITA**
Los tres lados	Cualquier ángulo
Dos lados y un ángulo	Otro lado

Cuando se conocen dos lados, a, b, y el ángulo que forman, $\hat{C}$, y se desea conocer otro ángulo, $\hat{A}$, es necesario aplicar sucesivamente los dos teoremas:



Primero se calcula c, después $\hat{A}$.

— Con el teorema del coseno, calculamos c: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$

— Conocido c, aplicamos el teorema de los senos para calcular $\hat{A}$:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \quad\rightarrow\quad \operatorname{sen}\hat{A} = \frac{a}{c}\operatorname{sen}\hat{C} \quad\rightarrow\quad \hat{A} = \ldots$$

Por ejemplo:

Ejemplo 1

Conocemos $a = 132$ *m,* $b = 213$ *m,* $c = 156$ *m. Calcular el ángulo* $\hat{B}$.

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\hat{B}$. De esta igualdad despejamos $\cos\hat{B}$:

$$\cos\hat{B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{156^2 + 132^2 - 213^2}{2 \cdot 156 \cdot 132} = -0{,}0876\ldots$$

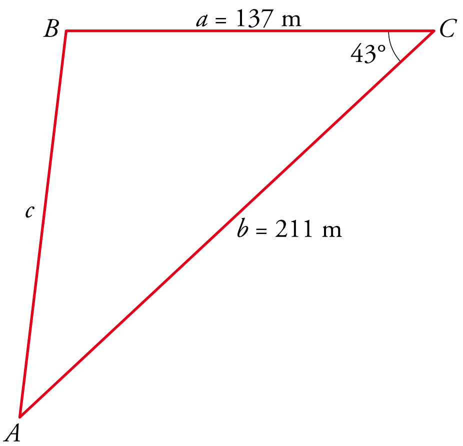
$\hat{B} = 95{,}027° = 95°\ 1'\ 38''$ (-0.0876 INV cos = 95.02734166 INV sin 95°1°38.43)

Ejemplo 2

Conocemos $a = 137$ *m,* $b = 211$ *m,* $\hat{C} = 43°$. *Calcular el lado* c *y el ángulo* $\hat{A}$.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} = 137^2 + 211^2 - 2 \cdot 137 \cdot 211 \cdot \cos 43° = 21\,007{,}52$$

$$c = \sqrt{21\,007{,}52} = 144{,}94$$



El lado c mide, aproximadamente, 145 m.

Con el teorema de los senos:

$$\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{c}{\text{sen}\,C} \;\rightarrow\; \frac{137}{\text{sen}\,A} = \frac{144{,}94}{\text{sen}\,43°}$$

$$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{137 \cdot \text{sen}\,43°}{144{,}94} \simeq 0{,}6446\ldots$$

$$\hat{A} = 40{,}139 = 40°\ 8'\ 19''$$

ACTIVIDADES

1 Conocemos $a = 7$ cm, $b = 11$ cm, $c = 15$ cm. Calcula $\hat{C}$.

Solución:

2 Sabemos que la distancia en línea recta de Perales a Ciruelo de Arriba es 3,6 km y de Perales a Ciruelo de Abajo, 5,4 km. El ángulo que forman Ciruelo de Arriba y Ciruelo de Abajo, desde Perales, es de 57°. ¿Cuál es la distancia entre Ciruelo de Arriba y Ciruelo de Abajo?

Solución:

3 Conocemos $b = 17$ m, $c = 11$ m, $\hat{A} = 113°$. Calcula $\hat{B}$. (Recuerda, primero has de calcular a).

Solución:

5. Ampliación teórica: resolución de triángulos cualesquiera: teoremas de los senos y del coseno

Soluciones

Hemos visto que, mediante la estrategia de la altura, podemos resolver triángulos cualesquiera trazando una de sus alturas y resolviendo los dos triángulos rectángulos que se forman.

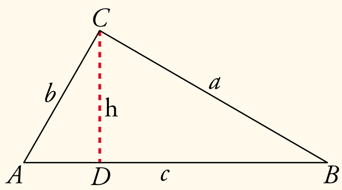
Si en vez de seguir esta estrategia con cada triángulo en particular, la realizamos con un triángulo cualquiera de lados a, b, c y ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, obtenemos unas fórmulas con las que la resolución de triángulos oblicuángulos se realiza de forma casi automática.

Teorema de los senos

En un triángulo cualquiera, si dos lados son iguales sus ángulos opuestos también lo son; y si un lado es mayor que otro, sus ángulos opuestos también cumplen la misma relación. Esta propiedad se concreta del siguiente modo:

En un triángulo cualquiera de lados a, b, c y ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}$$



Para demostrar la primera de las igualdades, se traza la altura h sobre el lado c, con lo que se obtienen dos triángulos rectángulos ADC y CDB.

$$\left.\begin{array}{l} \text{En } ADC\text{: } sen\ \hat{A} = \dfrac{h}{b} \ \rightarrow\ h = b\ sen\ \hat{A} \\ \text{En } CDB\text{: } sen\ \hat{B} = \dfrac{h}{a} \ \rightarrow\ h = a\ sen\ \hat{B} \end{array}\right\} b\ sen\ \hat{A} = a\ sen\ \hat{B} \ \rightarrow\ \frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}}$$

Trazando la altura desde el vértice A se obtendría la segunda igualdad.

5. Ampliación teórica: resolución de triángulos cualesquiera: teoremas de los senos y del coseno

Soluciones

Aplicaciones del teorema de los senos

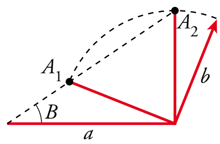
El teorema de los senos da lugar a tres igualdades:

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} \qquad \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} \qquad \frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}$$

Cada una de ellas relaciona dos lados con los ángulos opuestos. Por tanto, con ellas se puede resolver un triángulo en el cual los datos y las incógnitas sean dos lados y sus ángulos opuestos. (Recordemos que conocer dos ángulos es equivalente a conocer los tres).

TRIÁNGULOS QUE SE PUEDEN RESOLVER	
DATOS	**INCÓGNITA**
Dos ángulos y un lado	Otro lado
Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos	Otro ángulo

Cuando al aplicar el teorema de los senos la incógnita es uno de los ángulos, puede haber dos soluciones, pues hay dos ángulos con el mismo seno, uno agudo y otro obtuso.

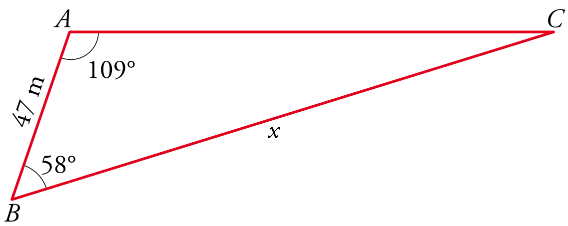


$\hat{A}_1$ es obtuso; $\hat{A}_2$ es agudo

Veamos dos ejemplos de aplicación:

Ejemplo 1

La distancia de A a B es 47 m. Conocemos los ángulos $\hat{A}$ = 109°, $\hat{B}$ = 58°. ¿Cuál es la distancia de B a C?



Empezamos por calcular $\hat{C}$, que es el ángulo opuesto al lado conocido:

$$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 13°$$

Aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{x}{sen\ 109°} = \frac{47}{sen\ 13°} \rightarrow x = 47 \cdot \frac{sen\ 109°}{sen\ 13°} = 197{,}55$$

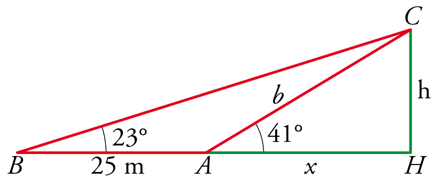
Solución: La distancia de B a C es de 197,55 m.

Soluciones

Ejemplo 2

Vamos a resolver el ejercicio resuelto de la página 157 del libro, mediante el teorema de los senos.

Quieres conocer el ancho de un río y la altura de un árbol que está en la orilla opuesta. Para ello, te sitúas frente al árbol y mides el ángulo que forma con la horizontal la visual a la parte alta del árbol (41°). Te alejas del árbol en dirección perpendicular a la orilla, andando 25 m. Vuelves a medir el ángulo que forma con la horizontal la visual a la parte alta del árbol. Ahora son 23°.



En el triángulo ABC conocemos dos ángulos, $\hat{B} = 23°$, $\hat{A} = 180° - 41° = 139°$.

Por tanto, podemos calcular el tercer ángulo: $\hat{C} = 180° - (23° + 139°) = 18°$

Aplicando el teorema de los senos, podemos calcular el lado $\overline{AC} = b$:

$$\frac{b}{sen\ 23°} = \frac{25}{sen\ 18°} \rightarrow b = 25 \cdot \frac{sen\ 23°}{sen\ 18°} = 31{,}6 \text{ m}$$

Conociendo b, hipotenusa del triángulo rectángulo AHC, podemos hallar sus catetos:

h $= b\ sen\ 41° = 20{,}7$. La altura del árbol es 20,7 m.

$x = b\ cos\ 41° = 23{,}8$. El ancho del río es de 23,8 m.

Las diferencias observadas con relación a la solución de la página 157 son debidas a los redondeos efectuados en los pasos intermedios.

5. Ampliación teórica: resolución de triángulos cualesquiera: teoremas de los senos y del coseno

Soluciones

Teorema del coseno

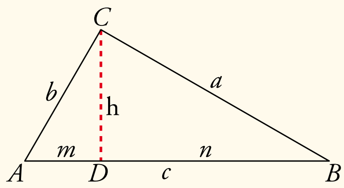
El teorema de Pitágoras se generaliza para triángulos cualesquiera mediante las siguientes igualdades:

En un triángulo cualquiera se cumple que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$



Para demostrar la primera de las igualdades, aplicamos el teorema de Pitágoras en cada uno de los dos triángulos rectángulos que se forman al trazar la altura h, ADC y CDB.

En $CDB \;\rightarrow\; a^2 = \text{h}^2 + n^2 = \text{h}^2 + (c - m)^2 = \text{h}^2 + c^2 + m^2 - 2cm$

En $ADC \;\rightarrow\; b^2 = \text{h}^2 + m^2$

Restando:

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2cm$$

$$\downarrow$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$$

$$\downarrow(*)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

(*) Para llegar a la última igualdad, tenemos en cuenta que en ADC $\cos \hat{A} = \dfrac{m}{b} \;\rightarrow\; m = b \cos \hat{A}$

Las otras dos igualdades se prueban de forma similar.

5. Ampliación teórica: resolución de triángulos cualesquiera: teoremas de los senos y del coseno

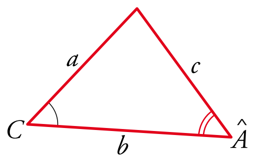
Soluciones

Aplicaciones del teorema del coseno

El teorema del coseno sirve para relacionar los tres lados de un triángulo con uno de sus ángulos. Por tanto, se podrá resolver con él cualquier triángulo en el que se conozcan los tres lados, o bien, dos lados y un ángulo.

TRIÁNGULOS QUE SE PUEDEN RESOLVER	
DATOS	**INCÓGNITA**
Los tres lados	Cualquier ángulo
Dos lados y un ángulo	Otro lado

Cuando se conocen dos lados, a, b, y el ángulo que forman, $\hat{C}$, y se desea conocer otro ángulo, $\hat{A}$, es necesario aplicar sucesivamente los dos teoremas:



Primero se calcula c, después $\hat{A}$.

— Con el teorema del coseno, calculamos c: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$

— Conocido c, aplicamos el teorema de los senos para calcular $\hat{A}$:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \rightarrow \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{a}{c} \operatorname{sen} \hat{C} \rightarrow \hat{A} = \dots$$

Por ejemplo:

Ejemplo 1

Conocemos $a = 132$ m, $b = 213$ m, $c = 156$ m. Calcular el ángulo $\hat{B}$.

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \hat{B}$. De esta igualdad despejamos $\cos \hat{B}$:

$$\cos \hat{B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{156^2 + 132^2 - 213^2}{2 \cdot 156 \cdot 132} = -0{,}0876\dots$$

$\hat{B} = 95{,}027° = 95°\ 1'\ 38''$ (-0.0876 INV cos = 95.02734166 INV sin 95°1°38.43)

5. Ampliación teórica: resolución de triángulos cualesquiera: teoremas de los senos y del coseno

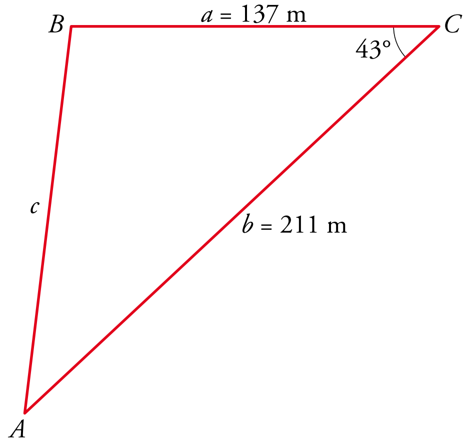
Soluciones

Ejemplo 2

Conocemos $a = 137$ *m,* $b = 211$ *m,* $\hat{C} = 43°$. *Calcular el lado* c *y el ángulo* $\hat{A}$.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} = 137^2 + 211^2 - 2 \cdot 137 \cdot 211 \cdot \cos 43° = 21\,007{,}52$$

$$c = \sqrt{21\,007{,}52} = 144{,}94$$



El lado c mide, aproximadamente, 145 m.

Con el teorema de los senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \rightarrow \frac{137}{\operatorname{sen} A} = \frac{144{,}94}{\operatorname{sen} 43°}$$

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{137 \cdot \operatorname{sen} 43°}{144{,}94} \simeq 0{,}6446\ldots$$

$$\hat{A} = 40{,}139 = 40°\ 8'\ 19''$$

ACTIVIDADES

1 Conocemos $a = 7$ cm, $b = 11$ cm, $c = 15$ cm. Calcula $\hat{C}$.

Solución: $\boxed{\hat{C} = 110°\ 55'\ 29''}$

2 Sabemos que la distancia en línea recta de Perales a Ciruelo de Arriba es 3,6 km y de Perales a Ciruelo de Abajo, 5,4 km. El ángulo que forman Ciruelo de Arriba y Ciruelo de Abajo, desde Perales, es de 57°. ¿Cuál es la distancia entre Ciruelo de Arriba y Ciruelo de Abajo?

Solución: $\boxed{d \simeq 4{,}6 \text{ km}}$

3 Conocemos $b = 17$ m, $c = 11$ m, $\hat{A} = 113°$. Calcula $\hat{B}$. (Recuerda, primero has de calcular a).

Solución: $\boxed{a = 23{,}58 \text{ m};\ \ B = 41°\ 34'\ 21''}$