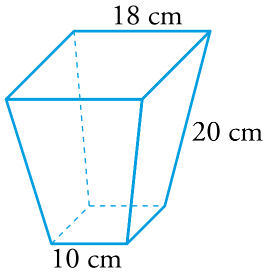
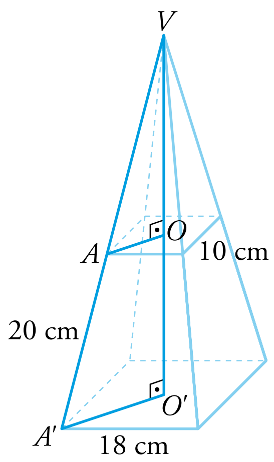
7. Ayuda a la resolución de problemas: triángulos semejantes en el espacio

1 Una maceta tiene forma de tronco de pirámide cuadrangular regular con las dimensiones que se indican en la figura. Calcula su volumen.

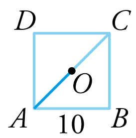


Ayuda

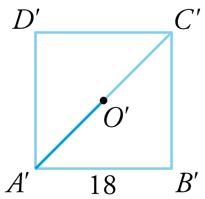


- Prolongamos las aristas laterales hasta que se corten para obtener la pirámide de la que se obtiene el tronco.

- Tenemos que hallar la altura de la pirámide mayor VO', y de la menor, VO:



$$\overline{AC} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \rightarrow \overline{AO} = \ldots$$



$$\overline{A'C'} = \sqrt{18^2 + 18^2} = 18\sqrt{2} \rightarrow \overline{A'O'} = \ldots$$

- Por la semejanza de los triángulos AOV y $A'O'V'$ se verifica:

$$\frac{\overline{AV}}{\overline{A'V}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{A'O'}} \rightarrow \text{Obtén } \overline{AV} \text{ y } \overline{A'V}.$$

- Con el teorema de Pitágoras, halla las alturas $\overline{VO}$ y $\overline{V'O}$.

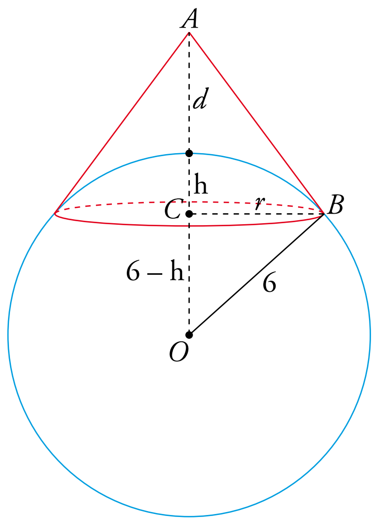
- Volumen del tronco = $V_{\text{PIRÁMIDE MAYOR}} - V_{\text{PIRÁMIDE MENOR}} = \frac{1}{3}18^2 \cdot \overline{VO'} - \frac{1}{3}10^2 \cdot \overline{VO} = \ldots$

Solución

7. Ayuda a la resolución de problemas: triángulos semejantes en el espacio

2 Queremos hacer un sombrero de cartulina en forma de cono que cubra la sexta parte de la superficie de una esfera de radio 6 cm.

Calcula la cantidad de cartulina que necesitaremos.



Ayuda

- Hallamos la superficie del casquete que cubre el cono:

$$S_{\text{CASQUETE}} = \frac{1}{6} S_{\text{ESFERA}} = \frac{1}{6} 4\pi R^2 = 24\pi \text{ cm}^2$$

- Con la superficie del casquete hallamos su altura h:

$$2\pi R\text{h} = 24\pi \quad \to \quad \text{h} = \ldots$$

- En el triángulo rectángulo OCB calculamos r, radio del cono:

$$r^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OC}^2 \quad \to \quad r = \ldots$$

- Justifica que el triángulo OAB es rectángulo y aplica en él el teorema de la altura para hallar d:

$r^2 = (6 - \text{h})(d + \text{h})$ Sustituye r y h y obtén d.

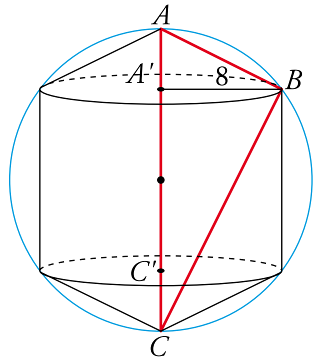
- Halla la generatriz del cono en cualquiera de los triángulos ABC o ABO.

- Superficie lateral del cono: $\pi r g = \ldots$

Solución

7. Ayuda a la resolución de problemas: triángulos semejantes en el espacio

3 Una pieza mecánica está formada por un cilindro y dos conos encajados en una esfera de radio 10 cm. Calcula el volumen de la pieza en la que el radio del cilindro es 8 cm.

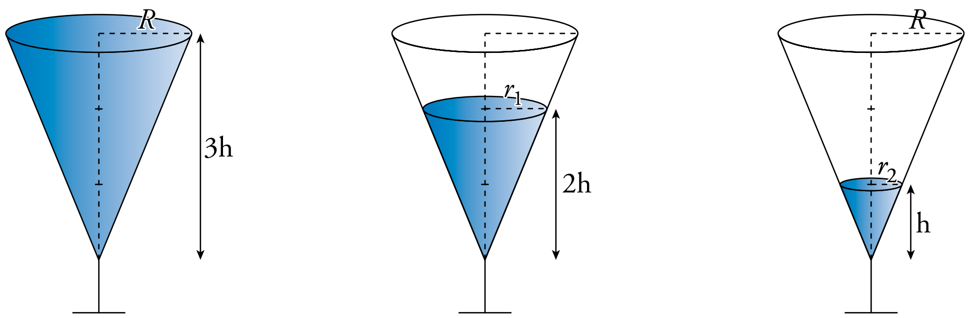


Ayuda

- Hay que hallar la altura de los conos y del cilindro.
- Observa el triángulo rectángulo ABC y aplica el teorema de la altura.

Solución

4 Hemos llenado tres copas idénticas de forma distinta, tal como indica la figura. Si el volumen del líquido que contiene la primera es V, ¿cuál será el volumen de líquido en las otras dos?



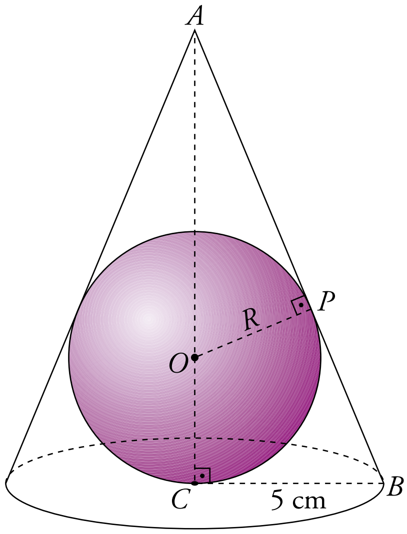
Ayuda

- El volumen total es $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 3h = \pi R^2 h$
- Utiliza la semejanza de triángulos para hallar r_1 y r_2 en función de R.

Solución

7. Ayuda a la resolución de problemas: triángulos semejantes en el espacio

5 En un cono de radio 5 cm y altura 12 cm se inscribe una esfera. Calcula su radio.



Ayuda

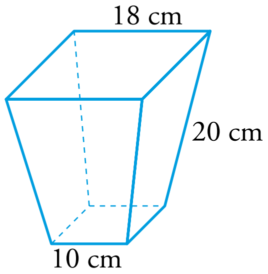
- Los triángulos ACB y APO son semejantes, por ser rectángulos con un ángulo agudo común, el $\hat{A}$.
- Por semejanza: $\dfrac{\text{Hipotenusa de } APO}{\text{Hipotenusa de } ACB} = \dfrac{\text{Cateto menor de } APO}{\text{Cateto menor de } ACB}$
- Calcula $\overline{AB}$.
- Ten en cuenta que $\overline{AO} = \overline{AC} - R$.

Solución

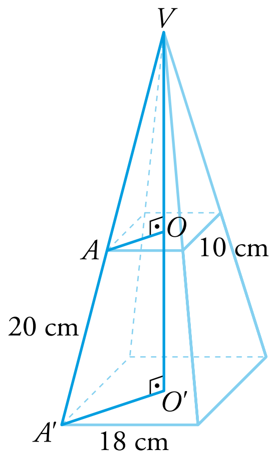
7. Ayuda a la resolución de problemas: triángulos semejantes en el espacio

Soluciones

1 Una maceta tiene forma de tronco de pirámide cuadrangular regular con las dimensiones que se indican en la figura. Calcula su volumen.

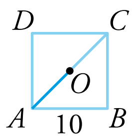


Ayuda

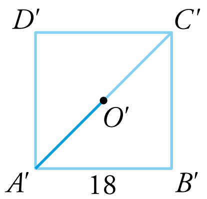


- Prolongamos las aristas laterales hasta que se corten para obtener la pirámide de la que se obtiene el tronco.

- Tenemos que hallar la altura de la pirámide mayor VO', y de la menor, VO:



$$\overline{AC} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \rightarrow \overline{AO} = \dots$$



$$\overline{A'C'} = \sqrt{18^2 + 18^2} = 18\sqrt{2} \rightarrow \overline{A'O'} = \dots$$

- Por la semejanza de los triángulos AOV y $A'O'V'$ se verifica:

$$\frac{\overline{AV}}{\overline{A'V}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{A'O'}} \rightarrow \text{Obtén } \overline{AV} \text{ y } \overline{A'V}.$$

- Con el teorema de Pitágoras, halla las alturas $\overline{VO}$ y $\overline{V'O}$.

- Volumen del tronco = $V_{\text{PIRÁMIDE MAYOR}} - V_{\text{PIRÁMIDE MENOR}} = \frac{1}{3}18^2 \cdot \overline{VO'} - \frac{1}{3}10^2 \cdot \overline{VO} = \dots$

Solución

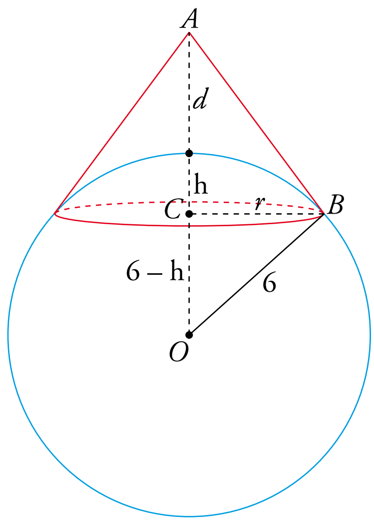
$\overline{AO} = 5\sqrt{2}$ cm; $\overline{A'O'} = 9\sqrt{2}$ cm; $\overline{AV} = 25$ cm; $\overline{A'V} = 45$ cm; $\overline{VO} \simeq 23{,}98$ cm; $\overline{VO'} \simeq 43{,}16$ cm

$V = 3\,861{,}95$ cm^3

7. Ayuda a la resolución de problemas: triángulos semejantes en el espacio
Soluciones

2 Queremos hacer un sombrero de cartulina en forma de cono que cubra la sexta parte de la superficie de una esfera de radio 6 cm.

Calcula la cantidad de cartulina que necesitaremos.



Ayuda

- Hallamos la superficie del casquete que cubre el cono:

$$S_{\text{CASQUETE}} = \frac{1}{6} S_{\text{ESFERA}} = \frac{1}{6} 4\pi R^2 = 24\pi \text{ cm}^2$$

- Con la superficie del casquete hallamos su altura h:

$$2\pi R\text{h} = 24\pi \;\rightarrow\; \text{h} = \ldots$$

- En el triángulo rectángulo OCB calculamos r, radio del cono:

$$r^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OC}^2 \;\rightarrow\; r = \ldots$$

- Justifica que el triángulo OAB es rectángulo y aplica en él el teorema de la altura para hallar d:

$r^2 = (6 - \text{h})(d + \text{h})$ Sustituye r y h y obtén d.

- Halla la generatriz del cono en cualquiera de los triángulos ABC o ABO.

- Superficie lateral del cono: $\pi r g = \ldots$

Solución

h = 2 cm; $r = \sqrt{20}$ cm

El triángulo OAB es rectángulo ya que la tangente a la esfera desde A, $\overline{AB}$, es perpendicular al radio en el punto de tangencia.

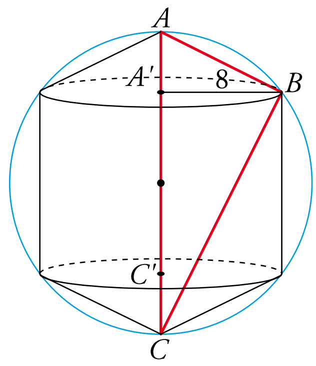
$d = 3$ cm $\rightarrow$ $g = \sqrt{45} = 6{,}71$ cm

$A_{\text{LATERAL}} = 94{,}25 \text{ cm}^2$

7. Ayuda a la resolución de problemas: triángulos semejantes en el espacio

Soluciones

3 Una pieza mecánica está formada por un cilindro y dos conos encajados en una esfera de radio 10 cm. Calcula el volumen de la pieza en la que el radio del cilindro es 8 cm.



AYUDA

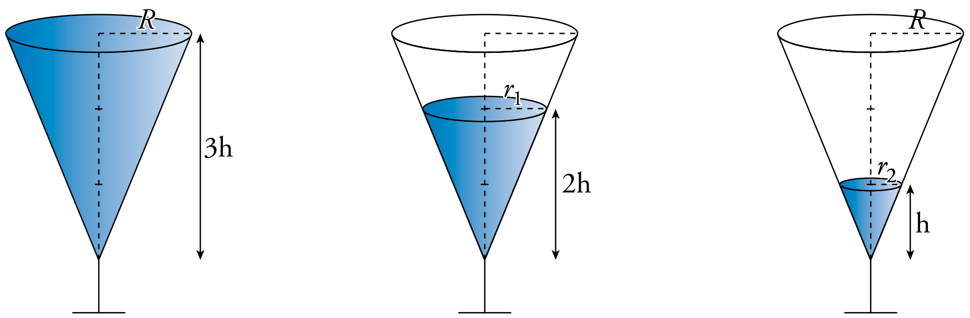
- Hay que hallar la altura de los conos y del cilindro.
- Observa el triángulo rectángulo ABC y aplica el teorema de la altura.

SOLUCIÓN

$x^2 - 20x + 64 = 0$; $\overline{AA'} = 4$ cm; $\overline{A'C'} = 12$ cm

$$V = 2\left(\frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 4}{3}\right) + \pi \cdot 8^2 \cdot 12 = 2\,948{,}91 \text{ cm}^3$$

4 Hemos llenado tres copas idénticas de forma distinta, tal como indica la figura. Si el volumen del líquido que contiene la primera es V, ¿cuál será el volumen de líquido en las otras dos?



AYUDA

- El volumen total es $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 3\text{h} = \pi R^2\text{h}$
- Utiliza la semejanza de triángulos para hallar r_1 y r_2 en función de R.

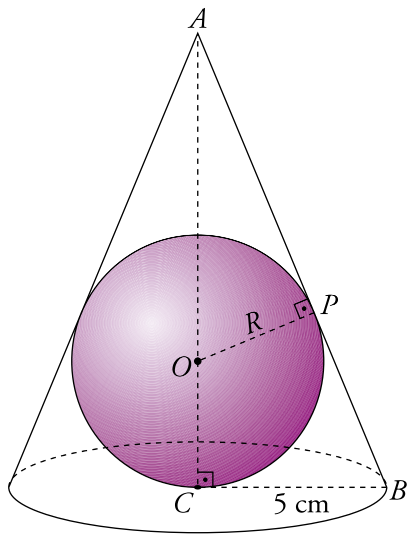
SOLUCIÓN

$r_1 = \frac{2}{3}R$; $r_2 = \frac{1}{3}R \rightarrow V_1 = \frac{8}{27}V$; $V_2 = \frac{1}{27}V$

7. Ayuda a la resolución de problemas: triángulos semejantes en el espacio

Soluciones

5 En un cono de radio 5 cm y altura 12 cm se inscribe una esfera. Calcula su radio.



Ayuda

- Los triángulos ACB y APO son semejantes, por ser rectángulos con un ángulo agudo común, el $\hat{A}$.
- Por semejanza: $\dfrac{\text{Hipotenusa de } APO}{\text{Hipotenusa de } ACB} = \dfrac{\text{Cateto menor de } APO}{\text{Cateto menor de } ACB}$
- Calcula $\overline{AB}$.
- Ten en cuenta que $\overline{AO} = \overline{AC} - R$.

Solución

$\dfrac{12 - R}{13} = \dfrac{R}{5} \rightarrow R = 3,\widehat{3}$ cm