Amplía: demostración de la equivalencia de las igualdades para la varianza

Sobre el signo Σ (sumatorio)

Ya sabes que el signo Σ se utiliza para indicar sumas de varios sumandos.

Has encontrado este símbolo en varias expresiones de esta unidad. Por ejemplo:

Media $= \bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i}{n}$ Varianza $= \dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n} = \dfrac{\Sigma x_i^2}{n} - \bar{x}^2$

Si consideramos datos agrupados en tablas de frecuencias:

Media $= \bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i f_i}{\Sigma f_i}$ Varianza $= \dfrac{\Sigma f_i(x_i - \bar{x})^2}{\Sigma f_i} = \dfrac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2$

Recuerda que:

$\Sigma f_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ = suma de *todas* las frecuencias = n.º total de datos

$\Sigma f_i x_i = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_n x_n$ = suma de *todos* los resultados que se obtienen al multiplicar cada dato por su frecuencia

$\Sigma f_i x_i^2 = f_1 x_1^2 + f_2 x_2^2 + \ldots + f_n x_n^2$ = suma de *todos* los resultados que se obtienen al multiplicar el cuadrado de cada dato por la frecuencia correspondiente

Propiedades:

Vamos a ver un par de propiedades que nos ayudarán a justificar que las dos expresiones que tenemos para la varianza (y, por tanto, para la desviación típica) son equivalentes.

1 $\Sigma(x_i + y_i) = \Sigma x_i + \Sigma y_i$

Puesto que: $\Sigma(x_i + y_i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \ldots + (x_n + y_n) =$

$= (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = \Sigma x_i + \Sigma y_i$

2 $\Sigma\, k\, x_i = k\, \Sigma x_i$

Puesto que: $\Sigma\, k\, x_i = k\, x_1 + k\, x_2 + \ldots + k\, x_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sacando factor común}}}{=} k(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = k\, \Sigma\, x_i$

Justificación de la equivalencia de las dos expresiones para la varianza (y, por tanto, para la desviación típica)

Queremos probar que:

$$\frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{\Sigma f_i} = \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2$$

Veamos, paso a paso, cómo podemos llegar a la segunda expresión a partir de la primera (encima de los signos igual encontrarás el número correspondiente a la propiedad que hemos utilizado de las dos anteriores):

$$\frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{\Sigma f_i} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{desarrollamos el cuadrado}}}{=} \frac{\Sigma f_i (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{\Sigma f_i} = \frac{\Sigma (f_i x_i^2 - 2 f_i x_i \bar{x} + f_i \bar{x}^2)}{\Sigma f_i} =$$

$$\overset{\boxed{1}}{=} \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} + \frac{\Sigma (-2) f_i x_i \bar{x}}{\Sigma f_i} + \frac{\Sigma f_i \bar{x}^2}{\Sigma f_i} =$$

$$\overset{\boxed{2}}{=} \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - 2\bar{x} \left(\frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}\right)^{= \bar{x}} + \bar{x}^2 \cdot \left(\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right)^{= 1} =$$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x}^2 =$$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 =$$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2$$

Por tanto:

$$\frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{\Sigma f_i} = \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2$$