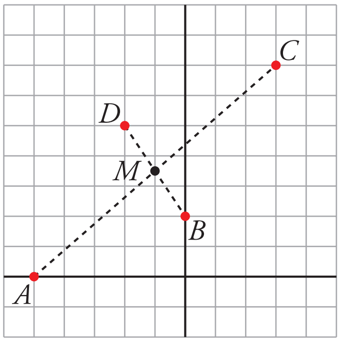
PÁGINA 197

¿Sabes hallar el punto medio de un segmento y el simétrico de un punto respecto de otro? ¿Y comprobar si tres puntos están alineados?

1 Representa los puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 7)$ y $D(-2, 5)$ y comprueba analíticamente que el punto medio de AC coincide con el punto medio de BD.



$$M_{AC} = \left(\frac{3-5}{2}, \frac{7-0}{2}\right) = (-1;\ 3{,}5)$$

$$M_{BD} = \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{5+2}{2}\right) = (-1;\ 3{,}5)$$

Punto medio de AC = punto medio de BD = $(-1;\ 3{,}5)$

2 Halla el simétrico de $P(-7, -15)$ respecto de $M(2, 0)$.

Sea $Q(a, b)$ el simétrico de P respecto de M. M es el punto medio de PQ.

$$M_{PQ} = \left(\frac{-7+a}{2}, \frac{-15+b}{2}\right) = (2, 0) \begin{cases} -7 + a = 4 \ \to \ a = 11 \\ -15 + b = 0 \ \to \ b = 15 \end{cases}$$

3 Halla el valor de k para que los puntos $A(1, -5)$, $B(3, 0)$ y $C(6, k)$ estén alineados.

Para que A, B y C estén alineados, debe ser $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{BC}$ y, por tanto, sus coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3, 0) - (1, -5) = (2, 5) \\ \overrightarrow{BC} = (6, k) - (3, 0) = (3, k) \end{array}\right\} \ \frac{2}{3} = \frac{5}{k} \ \to \ k = \frac{15}{2}$$

¿Sabes calcular la distancia entre dos puntos?

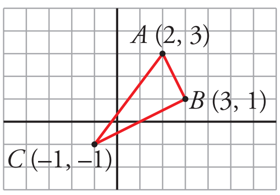
4 Calcula la longitud de los lados del triángulo de vértices $A(-4, 1)$, $B(6, 3)$ y $C(-2, -3)$.

Lado AB: $\overrightarrow{AB} = (6, 3) - (-4, 1) = (10, 2) \ \to \ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{104}$

Lado AC: $\overrightarrow{AC} = (-2, -3) - (-4, 1) = (2, -4) \ \to \ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$

Lado BC: $\overrightarrow{BC} = (-2, -3) - (6, 3) = (-8, -6) \ \to \ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$

5 Comprueba que el triángulo de vértices $A(2, 3)$, $B(3, 1)$ y $C(-1, -1)$ es rectángulo y halla su perímetro y su área.



$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(2+1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(3+1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Comprobamos que el triángulo es rectángulo aplicando el teorema de Pitágoras:

$5^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{20})^2 \rightarrow 25 = 5 + 20$

Perímetro $= \sqrt{5} + 5 + \sqrt{20} = 5 + 3\sqrt{5}$ u; Área $= \dfrac{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 5$ u^2

¿Obtienes con soltura la ecuación de una recta dada de diferentes formas?

6 Obtén la ecuación de las rectas r y s tales que:

r pasa por (–3, 2) y es perpendicular a $8x - 3y + 6 = 0$.

s pasa por (9, –5/2) y es paralela a $2x + y - 7 = 0$.

- La pendiente de $8x - 3y + 6 = 0$ es $m = 8/3$.

  La pendiente de r es $m' = -3/8$.

  r: $y = 2 - \dfrac{3}{8}(x + 3) \rightarrow 8y = 16 - 3x - 9 \rightarrow 3x + 8y - 7 = 0$

- La pendiente de s es $m = -2$.

  s: $y = -\dfrac{5}{2} - 2(x - 9) \rightarrow 2y = -5 - 4x + 36 \rightarrow 4x + 2y - 31 = 0$

7 En el triángulo de vértices $A(-2, 2)$, $B(0, 7)$ y $C(6, 4)$, halla la ecuación de la mediana que parte de B.

La mediana que parte de B pasa por B y el punto medio del segmento AC.

$M_{AC} = \left(\dfrac{-2 + 6}{2}, \dfrac{2 + 4}{2}\right) = (2, 3)$

Ecuación de la mediana: $\dfrac{x - 0}{2 - 0} = \dfrac{y - 7}{3 - 7} \rightarrow -4x = 2y - 14 \rightarrow y + 2x - 7 = 0$

¿Reconoces, sin representarlas, si dos rectas son paralelas o perpendiculares?

8 Estudia la posición relativa de estas rectas: r: $2x + y - 2 = 0$ s: $x + \dfrac{1}{2}y = 1$

$$\left.\begin{array}{l} r\text{: } 2x + y - 2 = 0 \xrightarrow{(*)} x + \dfrac{1}{2}y - 1 = 0 \rightarrow x + \dfrac{1}{2}y = 1 \\ s\text{: } x + \dfrac{1}{2}y = 1 \end{array}\right\} \text{Son la misma recta.}$$

(*) Dividimos por 2.

¿Obtienes con agilidad el punto de corte de dos rectas?

9 Halla el punto de intersección de las rectas: $3x + 8y - 7 = 0$ y $4x + 2y - 31 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 8y - 7 = 0 \\ 4x + 2y - 31 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{r} 3x + 8y - 7 = 0 \\ -16x - 8y + 124 = 0 \\ \hline -13x \qquad + 117 = 0 \end{array} \rightarrow x = 9$$

$3 \cdot 9 + 8y - 7 = 0 \rightarrow 8y = -20 \rightarrow y = -\dfrac{5}{2}$

El punto de intersección es $P\left(9, -\dfrac{5}{2}\right)$.