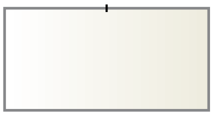
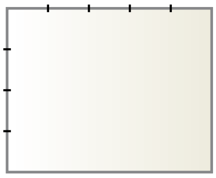
Rectángulos de proporciones interesantes



El lado mayor de este rectángulo es el doble que el menor. Es decir, los lados de este rectángulo están en la proporción 2:1. Si tomamos como unidad el lado menor, el mayor mide 2.

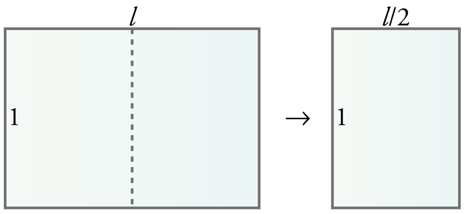


La proporción entre el lado mayor y el menor de este rectángulo es 5:4. Si tomamos como unidad el lado menor, el lado mayor mide 5/4.

Vamos a estudiar dos rectángulos de proporciones muy interesantes.

Una hoja de papel A-4

Las hojas de papel que se utilizan habitualmente (A-4) tienen una curiosa propiedad: *si las partimos por la mitad, cada uno de los dos trozos es semejante a la hoja inicial.* Basándonos en esta propiedad, vamos a hallar la proporción entre sus lados:



ESTOS DOS RECTÁNGULOS SON SEMEJANTES

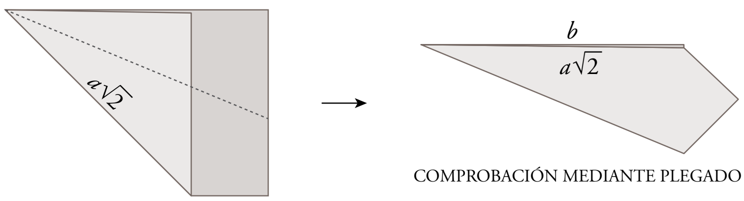
Tomamos como unidad el lado menor. La semejanza de los dos rectángulos nos lleva a la siguiente proporción:

$$\frac{l}{1} = \frac{1}{l/2}$$

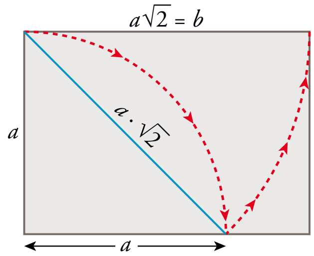
$$\frac{l}{1} = \frac{1}{l/2} \rightarrow \frac{l^2}{2} = 1 \rightarrow l^2 = 2 \rightarrow l = \sqrt{2}$$

Llegamos a la conclusión de que para que un rectángulo sea semejante a su mitad es necesario que la proporción entre sus lados sea $\sqrt{2}$.

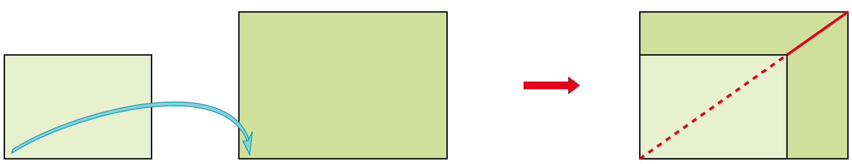
Observa en el margen cómo se comprueba si un rectángulo de dimensiones a y b cumple esta propiedad, usando, solamente, un compás. También se puede comprobar mediante dos pliegues.



COMPROBACIÓN MEDIANTE PLEGADO



■ **COMPROBACIÓN SENCILLA DE SI DOS RECTÁNGULOS SON SEMEJANTES**

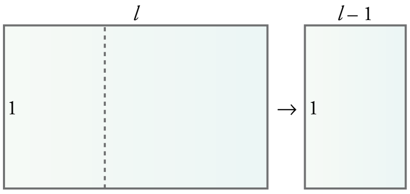


Se encaja el rectángulo pequeño en una esquina del grande. La esquina opuesta del pequeño debe estar situada sobre la diagonal del grande.

Rectángulos de proporciones interesantes

Rectángulo áureo

El rectángulo siguiente tiene la siguiente peculiaridad: si se le suprime un cuadrado, el rectángulo que queda es semejante al inicial. Veamos cuál es la relación entre sus dimensiones:



Tomamos como unidad el lado menor. La semejanza de los dos rectángulos nos lleva a la siguiente proporción:

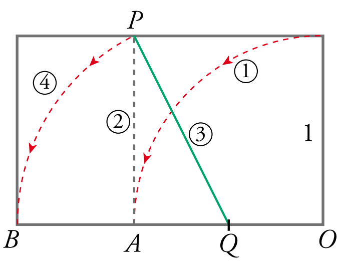
$$\frac{l}{1} = \frac{1}{l-1}$$

$$\frac{l}{1} = \frac{1}{l-1} \rightarrow l\,(l-1) = 1 \rightarrow l^2 - l - 1 = 0 \rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \rightarrow l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

La relación entre los dos lados es el número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ¿Recuerdas? Es el **número áureo, Φ**, que veíamos en la unidad 1. Por eso, este rectángulo y todos los semejantes a él se llaman **rectángulos aúreos.**

El carné de identidad y las tarjetas de crédito, por ejemplo, son rectángulos áureos. En arquitectura también se utilizan con mucha frecuencia rectángulos áureos.

¿Cómo comprobar con regla y compás si un cierto rectángulo es áureo? Observa el siguiente procedimiento basado en la construcción del número Φ:



① Llevamos el lado menor, 1, sobre el mayor: $\overline{OA} = 1$.

② Levantamos $\overline{AP} = 1$, formando un cuadrado.

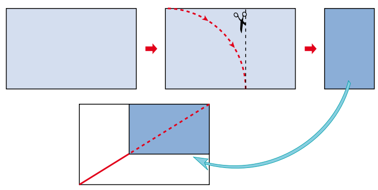
③ Q es el punto medio de AO. Y $\overline{PQ} = \sqrt{5}/2$.

④ Llevamos PQ sobre el lado mayor del rectángulo. BO mide $\sqrt{5}/2 + 1/2 = (\sqrt{5} + 1)/2 = \Phi$.

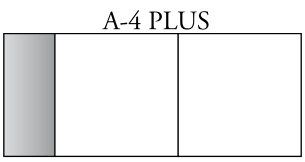
ACTIVIDADES

1 Si a una hoja A-4 se le corta una tira de 2,5 cm de ancha a lo largo del lado mayor, obtendrás un rectángulo áureo. Constrúyete dos.

A uno de ellos córtale un cuadrado. Comprueba que el rectángulo remanente es semejante al rectángulo inicial.



2 Si a una hoja A-4 le añadimos un cuadrado, el rectángulo resultante, al que llamaremos A-4 plus, tiene la siguiente curiosa propiedad: si le quitamos dos cuadrados, el rectángulo remanente es semejante al inicial.



El rectángulo sombreado es semejante al rectángulo total.

a) Compruébalo prácticamente.

b) Demuéstralo teniendo en cuenta que las dimensiones del A-4 plus son $\sqrt{2} + 1$, 1 y la del rectángulo sobrante son 1, $\sqrt{2} - 1$.