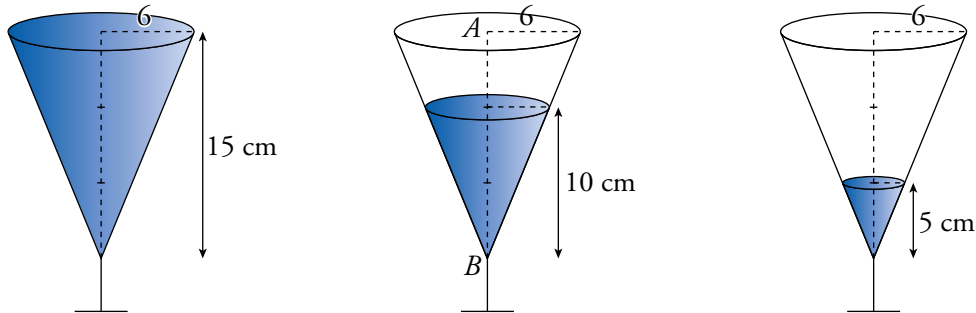




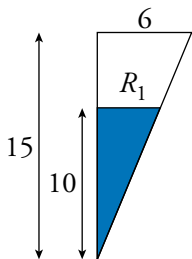
2. Ayuda a la resolución de problemas: triángulos semejantes en el espacio

- 1 Tenemos tres copas de forma cónica de 6 cm de radio y 15 cm de altura. La primera está llena, en la segunda el líquido alcanza 10 cm, y en la tercera, 5 cm. Calcula la cantidad de líquido que contiene cada copa.



AYUDA

- Volumen de la primera $V = \frac{\pi}{3} R^2 \cdot h = \dots$
- Para calcular el volumen de la segunda, necesitamos calcular el radio menor:



De la semejanza de estos triángulos:

$$\frac{R_1}{6} = \frac{10}{15} \rightarrow R_1 = \dots$$

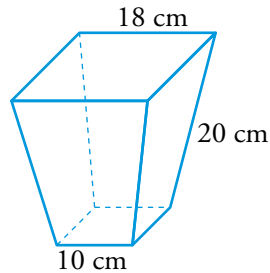
- Volumen de la segunda: $V = \frac{\pi}{3} R_1^2 \cdot 10 = \dots$
- Repite el procedimiento anterior para hallar el radio y el volumen de la tercera.

SOLUCIÓN

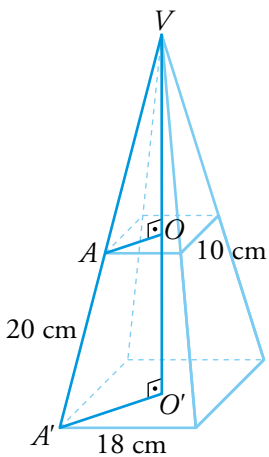


2. Ayuda a la resolución de problemas: triángulos semejantes en el espacio

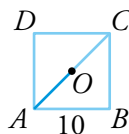
- 2 Una maceta tiene forma de tronco de pirámide cuadrangular regular con las dimensiones que se indican en la figura. Calcula su volumen.



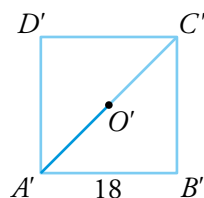
AYUDA



- Prolongamos las aristas laterales hasta que se corten para obtener la pirámide de la que se obtiene el tronco.
- Tenemos que hallar la altura de la pirámide mayor VO' , y de la menor, VO :



$$\overline{AC} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \rightarrow \overline{AO} = \dots$$



$$\overline{A'C'} = \sqrt{18^2 + 18^2} = 18\sqrt{2} \rightarrow \overline{A'O'} = \dots$$

- Por la semejanza de los triángulos AOV y $A'O'V'$ se verifica:

$$\frac{\overline{AV}}{\overline{A'V}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{A'O'}} \rightarrow \text{Obtén } \overline{AV} \text{ y } \overline{A'V}.$$

- Con el teorema de Pitágoras, halla las alturas \overline{VO} y $\overline{V'O'}$.

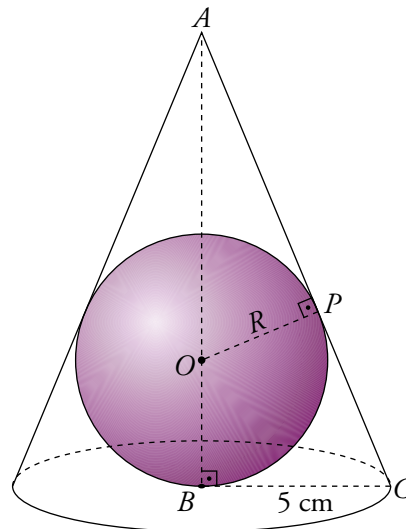
- Volumen del tronco = $V_{\text{PIRÁMIDE MAYOR}} - V_{\text{PIRÁMIDE MENOR}} = \frac{1}{3}18^2 \cdot \overline{V'O'} - \frac{1}{3}10^2 \cdot \overline{VO} = \dots$

SOLUCIÓN



2. Ayuda a la resolución de problemas: triángulos semejantes en el espacio

- 3 En un cono de 5 cm de radio y 12 cm de altura se inscribe una esfera. Calcula su radio.



AYUDA

- Hallamos la generatriz del cono:

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 = 5^2 + 12^2 \rightarrow \overline{AC} = \dots$$

- Los triángulos ABC y APO son semejantes, por ser rectángulos con un ángulo agudo común, el \hat{A} .
- Por semejanza:

$$\frac{\text{Hipotenusa de } APO}{\text{Hipotenusa de } ABC} = \frac{\text{Cateto menor de } APO}{\text{Cateto menor de } ABC} \rightarrow \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{BC}} \quad [1]$$

- Si llamamos R al radio de la esfera:

$$\overline{OP} = R \text{ y } \overline{AO} = \overline{AB} - R = 12 - R$$

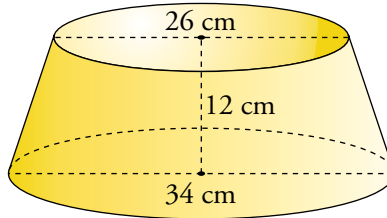
- Sustituye en la igualdad [1] y despeja R .

SOLUCIÓN

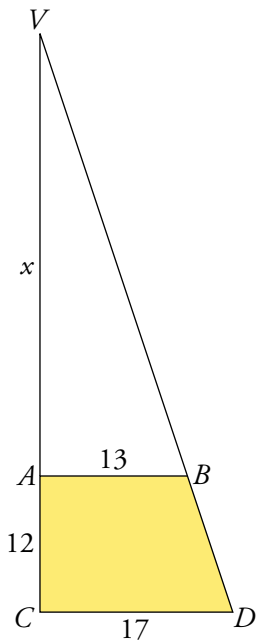


2. Ayuda a la resolución de problemas: triángulos semejantes en el espacio

- 4 Si cortamos un tronco de cono por un plano perpendicular a las bases la sección es un trapecio isósceles de bases 26 cm y 34 cm y altura 12 cm. Halla el volumen del tronco de cono.



AYUDA



Prolonga los lados laterales hasta llegar al vértice del cono y ten en cuenta la semejanza de los triángulos VAB y VCD :

$$\frac{x}{x + 12} = \frac{\dots}{\dots}$$

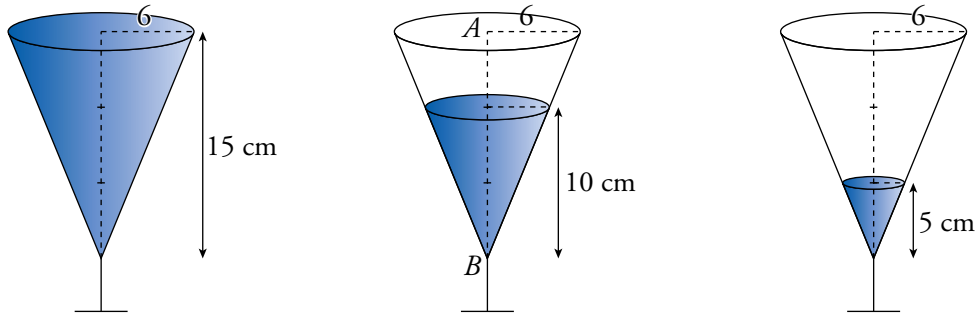
SOLUCIÓN



2. Ayuda a la resolución de problemas: triángulos semejantes en el espacio

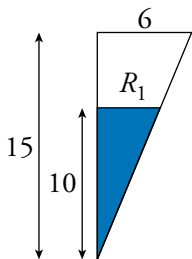
Soluciones

- 1 Tenemos tres copas de forma cónica de 6 cm de radio y 15 cm de altura. La primera está llena, en la segunda el líquido alcanza 10 cm, y en la tercera, 5 cm. Calcula la cantidad de líquido que contiene cada copa.



AYUDA

- Volumen de la primera $V = \frac{\pi}{3} R^2 \cdot h = \dots$
- Para calcular el volumen de la segunda, necesitamos calcular el radio menor:



De la semejanza de estos triángulos:

$$\frac{R_1}{6} = \frac{10}{15} \rightarrow R_1 = \dots$$

- Volumen de la segunda: $V = \frac{\pi}{3} R_1^2 \cdot 10 = \dots$
- Repite el procedimiento anterior para hallar el radio y el volumen de la tercera.

SOLUCIÓN

$$V = \frac{\pi}{3} 6^2 \cdot 15 = 565,49 \text{ cm}^3$$

$$\frac{R_1}{6} = \frac{10}{15} \rightarrow R_1 = 4 \text{ cm}$$

$$V_1 = \frac{\pi}{3} \cdot 4^2 \cdot 10 = 167,55 \text{ cm}^3$$

$$\frac{R_2}{6} = \frac{5}{15} \rightarrow R_2 = 2 \text{ cm}$$

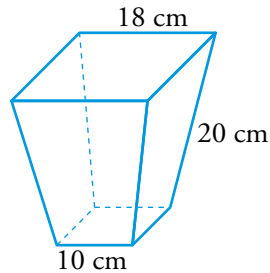
$$V_2 = \frac{\pi}{3} \cdot 2^2 \cdot 5 = 20,94 \text{ cm}^3$$



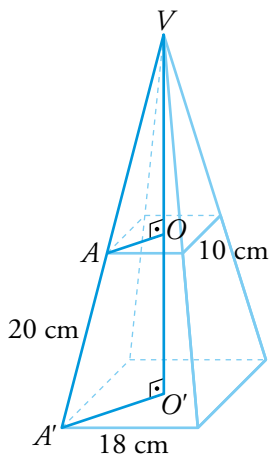
2. Ayuda a la resolución de problemas: triángulos semejantes en el espacio

Soluciones

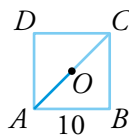
- 2 Una maceta tiene forma de tronco de pirámide cuadrangular regular con las dimensiones que se indican en la figura. Calcula su volumen.



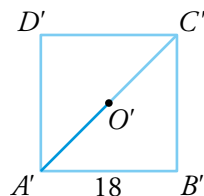
AYUDA



- Prolongamos las aristas laterales hasta que se corten para obtener la pirámide de la que se obtiene el tronco.
- Tenemos que hallar la altura de la pirámide mayor VO' , y de la menor, VO :



$$\overline{AC} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \rightarrow \overline{AO} = \dots$$



$$\overline{A'C'} = \sqrt{18^2 + 18^2} = 18\sqrt{2} \rightarrow \overline{A'O'} = \dots$$

- Por la semejanza de los triángulos AOV y $A'O'V'$ se verifica:

$$\frac{\overline{AV}}{\overline{A'V}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{A'O'}} \rightarrow \text{Obtén } \overline{AV} \text{ y } \overline{A'V}.$$

- Con el teorema de Pitágoras, halla las alturas \overline{VO} y $\overline{V'O'}$.

- Volumen del tronco = $V_{\text{PIRÁMIDE MAYOR}} - V_{\text{PIRÁMIDE MENOR}} = \frac{1}{3}18^2 \cdot \overline{V'O'} - \frac{1}{3}10^2 \cdot \overline{VO} = \dots$

SOLUCIÓN

$$\overline{AO} = 5\sqrt{2} \text{ cm}; \overline{A'O'} = 9\sqrt{2} \text{ cm}; \overline{AV} = 25 \text{ cm}; \overline{A'V} = 45 \text{ cm}; \overline{VO} \approx 23,98 \text{ cm}; \overline{V'O'} \approx 43,16 \text{ cm}$$

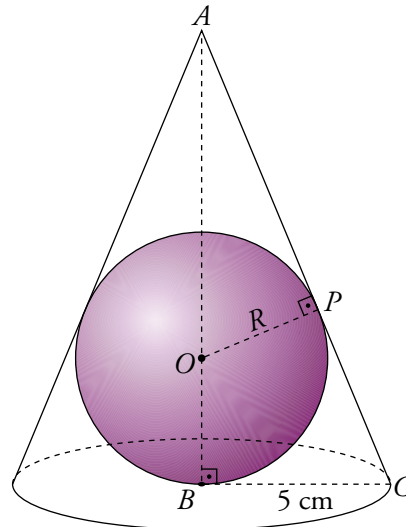
$$V = 3861,95 \text{ cm}^3$$



2. Ayuda a la resolución de problemas: triángulos semejantes en el espacio

Soluciones

- 3 En un cono de 5 cm de radio y 12 cm de altura se inscribe una esfera. Calcula su radio.



AYUDA

- Hallamos la generatriz del cono:

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 = 5^2 + 12^2 \rightarrow \overline{AC} = \dots$$

- Los triángulos ABC y APO son semejantes, por ser rectángulos con un ángulo agudo común, el \hat{A} .
- Por semejanza:

$$\frac{\text{Hipotenusa de } APO}{\text{Hipotenusa de } ABC} = \frac{\text{Cateto menor de } APO}{\text{Cateto menor de } ABC} \rightarrow \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{BC}} \quad [1]$$

- Si llamamos R al radio de la esfera:

$$\overline{OP} = R \text{ y } \overline{AO} = \overline{AB} - R = 12 - R$$

- Sustituye en la igualdad [1] y despeja R .

SOLUCIÓN

$$\overline{AC} = 13 \text{ cm}$$

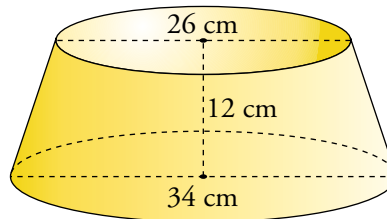
$$\frac{12 - R}{13} = \frac{R}{5} \rightarrow R = 3,3 \text{ cm}$$



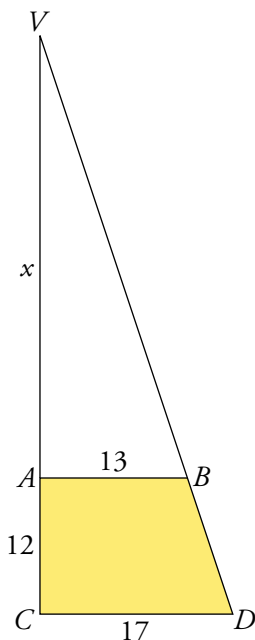
2. Ayuda a la resolución de problemas: triángulos semejantes en el espacio

Soluciones

- 4 Si cortamos un tronco de cono por un plano perpendicular a las bases la sección es un trapecio isósceles de bases 26 cm y 34 cm y altura 12 cm. Halla el volumen del tronco de cono.



AYUDA



Prolonga los lados laterales hasta llegar al vértice del cono y ten en cuenta la semejanza de los triángulos VAB y VCD :

$$\frac{x}{x + 12} = \frac{\dots}{\dots}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{x}{x + 12} = \frac{13}{17} \rightarrow x = 39 \text{ cm}$$

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot 17^2 \cdot 51 - \frac{\pi}{3} \cdot 13^2 \cdot 39 = 8\,532,57 \text{ cm}^3$$