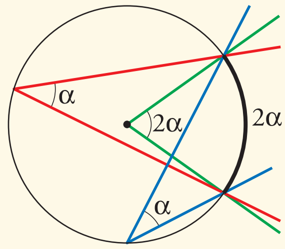
4. Ampliación teórica: demostración de esta propiedad

Propiedad

La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco que abarca, es decir, a la mitad del ángulo central correspondiente.

Por tanto, dos ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco son iguales.

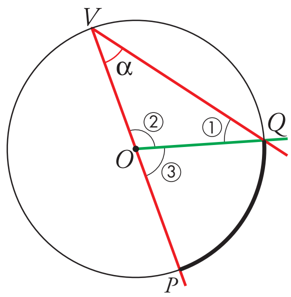


Demostración

Para demostrar la afirmación anterior, se dan tres casos:

1.° Si uno de los lados del ángulo pasa por el centro de la circunferencia:

El triángulo VOQ es isósceles, pues OV y OQ son radios de la circunferencia. Por tanto, ① = α.



Puesto que los ángulos de un triángulo suman 180°:

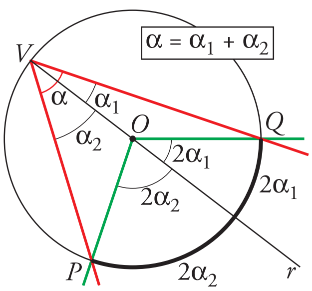
② = 180° – (α + ①) = 180° – 2α

Puesto que ③ es suplementario de ②:

③ = 180° – ② = 180° – (180° – 2α) = 2α

Por tanto, ③ = 2α, es decir, $\widehat{PVQ}$ es igual a la mitad del arco que abarca.

2.° Si el centro queda dentro de los dos lados del ángulo:



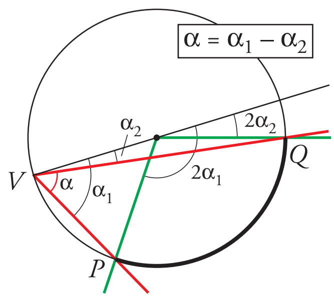
Trazamos una semirrecta r que pasa por V y por O. Dicha recta divide el ángulo en otros dos, cada uno de los cuales está en el caso anterior (1.°).

Por tanto, cada uno de ellos es la mitad del arco que abarca:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \; ; \quad \overset{\frown}{PQ} = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha$$

Es decir, $\widehat{PVQ} = \alpha$ es igual a la mitad del arco que abarca.

3.° Si el centro de la circunferencia queda en el exterior de los lados del ángulo:



Trazamos una recta que pasa por V y por el centro de la circunferencia.

En este caso:

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2; \quad \overset{\frown}{PQ} = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\alpha \;\rightarrow\; \alpha = \frac{\overset{\frown}{PQ}}{2}$$

Es decir, también en este caso, $\widehat{PVQ} = \alpha$ es igual a la mitad del arco que abarca.